НОВОСИБИРСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Фет

Математическое введение в теорию элементарных частиц

НОВОСИБИРСК 1966 г.

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И.Фет

На правах рукописи

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ.

(лекции для студентов НГУ).

г.Новосибирск
1966 г.

А.И. Фет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Предисловие

Возникшая в последние годы новая теория элементарных частиц, названная теорией унитарной симметрии, выдвинула на передний план некоторые разделы математики, которые в обычной квантовой механике играли более подчиненную, служебную роль. Основой теории унитарной симметрии являются представления групп и алгебр Ли, получаемые тензорными методами. Группы и их представления выступают здесь уже не как средство исследования уравнений, которые (в принципе) могли бы быть решены и без этого, а как принципиальная основа построения всей теории.

При этом применяются не представления ортогональной группы, обычные в квантовой механике, а представления унитарных групп, о которых нет сведений в доступной начинающему литературе.

Поэтому нашей целью было по возможности независимое и элементарное изложение теории представлений под углом зрения упомянутых выше приложений.

Метод получения представлений, наиболее соответствующий существу дела, был предложен около 1900 г. И.Шуром и впоследствии усовершенствован Г.Вейлем. Книга Г.Вейля "Классические группы" (1939) и является нашим главным источником.

Поскольку аппарат тензорной алгебры (над комплексным основным пространством) при таком построении необходим, изложение тензорной алгебры было также включено в эти лекции.

Кроме самых элементарных сведений о векторах и матрицах, никакой предварительной математической подготовки мы не предполагаем. Эти лекции написаны для физиков, точнее, для начинающих физиков. Поэтому мы ограничиваемся четкой формулировкой понятий, но многих более сложных теорем не доказываем.

Наконец, мы старались сделать изложение современным, но не педантичным. В ряде случаев это привело к сознательному пренебрежению деталями, которые, впрочем, обычно все равно остаются незамеченными без содействия преподавателя.

Юрий Борисович Румер ознакомился с планом лекций и оказал помощь в выборе материала, без которой все предприятие не имело бы смысла.

А.И. Фет

§ I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ В НИХ

I. Определения

Комплексное эвклидово пространство является естественным обобщением обычного (действительного) эвклидова пространства. Мы будем предполагать, что ~~для~~ задано некоторое множество предметов, называемых __векторами__. Что собой представляют эти предметы, совершенно несущественно: существенны лишь свойства их, перечисленные ниже и скопированные (с известными видоизменениями) со свойств обычных векторов трехмерного пространства. Векторы обозначаются через $x, y, \dots$

I. Векторы можно складывать, причем сложение их обладает обычными алгебраическими свойствами:

$$(x+y)+z = x+(y+z);$$

существует такой вектор 0, что для всех x

$$x+0=x; \qquad (I.I.I)$$

для любых x, y существует единственный вектор z такой, что

$$x+z=y$$

П. Векторы можно умножать на __комплексные__ числа (в этом состоит отличие комплексных эвклидовых пространств от действительных), причем умножение на числа обладает обычными алгебраическими свойствами

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y\ ; \qquad (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta y\ , \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x); \quad 1\cdot x = x; \tag{I.I.2}$$

III. Векторы можно скалярно умножать друг на друга; так как при этом возникают свойства, несколько более сложные, чем в элементарной векторной алгебре и связанные с комплексностью пространства, мы перечислим эти свойства подробнее. Обозначим скалярное произведение векторов x, y через (x/y). Тогда предполагается, что для любых комплексных чисел α, β и любых векторов x, y, z

$$\begin{gathered}(\alpha x + \beta y | z) = \bar{\alpha}(x|z) + \bar{\beta}(y|z) \\ (z|\alpha x + \beta y) = \alpha(z|x) + \beta(z|y)\end{gathered} \tag{I.I.3}$$

(обратите внимание на первое из этих правил: из первого сомножителя выносятся не множители α, β , а их сопряженные !). Далее, предполагается, что всегда

$$(x|x) \geq 0\ , \tag{I.I.4}$$

причем при $x \neq 0$ $\quad (x|x) > 0$.

Длина вектора определяется формулой

$$|x| = \sqrt{(x|x)} \tag{I.I.5}$$

IV. Существует система из n линейно-независимых векторов $e_1, \dots, e_n$, через которые можно линейно выразить каждый n - вектор x ;

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \tag{I.I.6}$$

Комплексные числа x^i называются координатами вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$. Число n называется размерностью комплексного эвклидова пространства, которое обозначается дальше через $C(n)$. В математической литературе $C(n)$ называется еще унитарным пространством. Отметим, что скалярное произведение не коммутативно; из (I.I.I) и (I.I.2) следует, что в равенстве

$$(x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y)$$

все члены, кроме $(x|y)$ и $(y|x)$, действительны; значит, $(x|y) + (y|x)$ действительно; подставляя, далее, ix вместо x, получаем правило, заменяющее коммутативный закон умножения:

$$(x|y) = \overline{(y|x)} \qquad (I.I.7)$$

Из (I) - (IУ) можно еще вывести неравенство Коши:

$$|(x|y)| \le |x|\cdot|y| \qquad (I.I.8)$$

Мы перечислили все свойства $C(n)$, которыми будем дальше пользоваться. В дальнейшем мы будем следовать тому же методу: вводя какое-либо математическое понятие, будем перечислять те свойства вводимых объектов, которые дальше используются, отсылая за дальнейшими подробностями к специальной литературе.

Комментарии

I. Формула (I.I.4) позволяет оспоставить каждому вектору x систему из n комплексных чисел $(x^1, \dots, x^n)$. Но ни в коем случае не следует думать, что вектор и есть эта система чисел! Если бы мы выбрали другой базис $e'_1, \dots, e'_n$, то получили бы для того же вектора x другое разложение

$$x = \sum_{j=1}^{n} x^{j'} e'_j$$

Таким образом, вектор x имеет координаты относительно любого базиса, и численные значения этих координат зависят также от выбора базиса, а не только от вектора x. Лишь совокупность всех систем $(x^1, \dots, x^n)$, $(x^{1'}, \dots, x^{n'}), \dots$, соответствующих всевозможным базисам, полностью характеризуется вектором (и характеризует его). Эта совокупность и может быть отождествлена с вектором x.

2. Отметим некоторые частные значения n, существенные для дальнейшего.

$n = 2$. 2 - вектор называется иначе спинором, а $C(2)$ - - пространством спиноров.

$n = 3$. 3 - вектор мы назовем трипором (общепринятого термина нет), а $C(3)$ - пространством трипоров.

$n = \infty$. В этом случае аксиома IУ заменяется следующей:

IУ'. Существует бесконечная последовательность векторов $e_1, e_2, \dots$, через которые можно линейно выразить каждый вектор:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x^j e_j \qquad (I.I.9)$$

В этом случае пространство – $C(\infty)$ – называется <u>гильбертовым пространством</u>. (Мы не занимаемся здесь вопросом, в каком смысле понимается сумма ряда (I.I.7), так как в дальнейшем рассматриваются, как правило, конечномерные $C(n)$).

Действия над векторами в координатах

Можно доказать, что в $C(n)$ существуют ортонормированные базисы $\{e_i\}$, т.е.

$$(e_i \mid e_k) = \delta_{ik}, \tag{I.I.10}$$

где $$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

<u>В дальнейшем мы будем пользоваться только ортонормированными базисами, и все координаты берутся относительно таких базисов</u>.

Заметим, что если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i$, то $x^i = (x \mid e_i)$

Условимся опускать знак суммирования по индексу, встречающемуся один раз сверху и один раз снизу: $\sum\limits_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i$ (<u>правило Эйнштейна</u>).

В фиксированном базисе $\{e_i\}$ имеем:

$$x + y = (x^i + y^i) e_i$$
$$\lambda x = (\lambda x^i) e_i$$
$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x^i} y_i \tag{I.I.II}$$

2. <u>Линейные операторы</u>. Линейным оператором $\mathcal{L}$ в $C(n)$ называется правило (закон, отображение), по которому каждому вектору x ставится в соответствие некоторый вектор $\mathcal{L}x$ (образ x), причем

$$\mathcal{L}(x + y) = \mathcal{L}x + \mathcal{L}y$$
$$\mathcal{L}(\lambda x) = \lambda \mathcal{L}x \tag{I.2.I}$$

Фиксируем базис $\{e_i\}$ и опишем действие оператора $\mathcal{L}$ в координатах.

Пусть

$$\mathcal{L} e_i = \mathcal{L}_i^j e_j \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \tag{I.2.2}$$

Тогда для каждого x

$$\mathcal{L}x = \mathcal{L}(x^i e_i) = x^i \mathcal{L}_i^j e_j ,$$

так что, полагая $\mathcal{L}x=y$, имеем:

$$y^j = \mathcal{L}^j_i x^i \qquad (I.2.3)$$

Матрица $\mathcal{L}^j_i$ называется <u>матрицей оператора $\mathcal{L}$ в базисе $\{e_i\}$</u>. Ни в коем случае не следует считать, что оператор $\mathcal{L}$ и матрица $\mathcal{L}^j_i$ - одно и то же! Пока мы, фиксировав базис, изучаем в одном и том же базисе разные операторы и соотношения между ними, можно пренебречь различием между оператором и его матрицей, так как одно определяет другое, но при изменении базиса тот же оператор $\mathcal{L}$ изображается другой матрицей: в базисе $\{e_{i'}\}$

$$y^{j'} = \mathcal{L}^{j'}_{i'} x^{i'}$$

Так как все системы координат равноправны, набор чисел $\mathcal{L}^j_i$ характеризует не оператор $\mathcal{L}$, а совокупность оператора и выбранного базиса. Лишь система из <u>всех</u> матриц $\mathcal{L}^j_i, \mathcal{L}^{j'}_{i'}, \ldots$ оператора $\mathcal{L}$ во <u>всевозможных</u> базисах может быть отождествлена с оператором $\mathcal{L}$. Настоящими объектами теории являются векторы и операторы, а не координаты и матрицы, служащие лишь для описания векторов и операторов в произвольном базисе.

Впрочем, как мы увидим дальше, задание оператора или системы операторов в $C(n)$ иногда позволяет естественным образом выделить базис, наиболее удобный для изучения этих операторов, и векторам этого базиса можно приписать физический смысл. Но сначала некоторые операторы должны быть заданы тем или иным способом.

<u>Действия над операторами</u>. Пусть $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ - операторы в $C(n)$; <u>суммой</u> их $\mathcal{L}+\mathcal{M}$ называется оператор, переводящий каждый вектор x в вектор $\mathcal{L}x + \mathcal{M}x$.

В любом базисе матрица оператора $\mathcal{L}+\mathcal{M}$ имеет вид

$$(\mathcal{L}+\mathcal{M})^j_i = \mathcal{L}^j_i + \mathcal{M}^j_i \qquad (I.2.4)$$

<u>Произведение оператора $\mathcal{L}$ на комплексное число</u> λ есть оператор, переводящий x в $\lambda\mathcal{L}x$; его матрица есть

$$(\lambda\mathcal{L})^j_i = \lambda\mathcal{L}^j_i \qquad (I.2.5)$$

<u>Произведение</u> $\mathcal{L}\mathcal{M}$ операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ есть оператор, переводящий x в $\mathcal{L}(\mathcal{M}x)$, т.е. результат последовательного применения операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ в указанном только что порядке: сначала $\mathcal{M}$, затем $\mathcal{L}$. Как правило, $\mathcal{L}\mathcal{M} \neq \mathcal{M}\mathcal{L}$. Матрица оператора $\mathcal{L}\mathcal{M}$ есть

$$(\mathcal{L}\mathcal{M})^j_i = \mathcal{L}^k_i \mathcal{M}^j_k \qquad (I.2.6)$$

Легко проверить, что выполнены обычные законы умножения (кроме коммутативного!):

$$(\mathcal{L}\mathcal{M})\mathcal{N} = \mathcal{L}(\mathcal{M}\mathcal{N})$$
$$(\lambda\mathcal{L})\mathcal{M} = \mathcal{L}(\lambda\mathcal{M}) = \lambda(\mathcal{L}\mathcal{M})$$
$$\mathcal{L}(\mathcal{M}+\mathcal{N}) = \mathcal{L}\mathcal{M} + \mathcal{L}\mathcal{N}$$
$$(\mathcal{M}+\mathcal{N})\mathcal{L} = \mathcal{M}\mathcal{L} + \mathcal{N}\mathcal{L} \tag{I.2.7}$$

Если $\mathcal{L}\mathcal{M} = \mathcal{E}(n)$ (тождественному оператору, переводящему каждый вектор x в себя), то $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ называются взаимно обратными:

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}^{-1}, \quad \mathcal{L} = \mathcal{M}^{-1}$$

Матрица тождественного оператора есть $\mathcal{E}_i^j = \delta_i^j$. Матрицы взаимно обратных операторов связаны соотношениями

$$\mathcal{L}_i^k (\mathcal{L}^{-1})_k^j = (\mathcal{L}^{-1})_i^k \mathcal{L}_k^j = \delta_i^j \tag{I.2.8}$$

Сопряженность операторов. Некоторые типы операторов

Операторы $\mathcal{L}$, $\overset{+}{\mathcal{L}}$ называются сопряженными, если для всех x, y

$$\boxed{(\overset{+}{\mathcal{L}}x|y) = (x|\mathcal{L}y)} \tag{I.2.9}$$

или, в координатах,

$$\overset{+}{\mathcal{L}}{}_i^j = \overline{\mathcal{L}}{}_j^i \tag{I.2.10}$$

Поскольку (I.2.10) равносильно инвариантному условию (I.2.9), связь между матрицами $\mathcal{L}_i^j$, $\overset{+}{\mathcal{L}}{}_i^j$, записанная в (I.2.10), сохраняется при замене базиса.

Оператор H называется эрмитовым, если он сам себе сопряжен, т.е.

$$\boxed{(Hx|y) = (x|Hy)} \tag{I.2.11}$$

или, в координатах,

$$\sum_{i,j} \overline{H_i^j x^i y^j} = \sum_{i,j} \overline{x}^j H_i^j y^i \tag{1.2.12}$$
$$H_i^j = \overline{H}_j^i \tag{I.2.13}$$

(это свойство матрицы H_i^j сохранится при замене базиса).

Оператор U называется унитарным, если он сохраняет скалярные произведения, т.е.

$$\boxed{(Ux|Uy) = (x|y)} \tag{I.2.14}$$

(I.2.14) означает, что U аналогичен движениям обычного пространства; таким образом, унитарные операторы, по определению, задают движения комплексного эвклидова пространства $C(n)$.

В частности, при $y = x$ получаем

$$|Ux| = |x| \tag{I.2.15}$$

Свойство (I.2.14) часто бывает удобно заменить эквивалентным свойством, которое получается следующим образом. Можно доказать, что унитарный оператор имеет обратный, т.е. что уравнение $Ux = y$ разрешимо при любом y, и притом единственным образом. Полагая в (I.2.14) $Ux = z$, $x = U^{-1}z$ имеем

$$(z|Uy) = (U^{-1}z|y)$$

С другой стороны, по определению сопряженного оператора,

$$(\overset{+}{U}z|y) = (z|Uy)$$

следовательно,

$$\overset{+}{U} = U^{-1} \tag{I.2.16}$$

Можно показать, что из (I.2.16), обратно, следует (I.2.15). В координатах (I.2.16) записывается в виде

$$(U^{-1})^j_i = \overset{+}{U}{}^j_i = \overline{U}{}^i_j \;;$$

но произведение матриц U^j_i, $(U^{-1})^j_i$ должно быть равно (при любом порядке умножения) единичной матрице, откуда

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{U}{}^j_i U^j_k = \delta_{ik} ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{U}{}^i_j U^k_j = \delta^{ik} \tag{I.2.17}$$

Можно показать, что каждое из условий (I.2.17) в отдельности уже равносильно унитарности оператора U; таким образом, эти условия сохраняются при замене базиса.

Подчеркнем, что свойство оператора быть унитарным (или эрмитовым) не зависит от системы координат, а только от характера его действия на n-векторы (см. (I.2.11) и (I.2.14)); но для того чтобы задать или изучить такой оператор, можно воспользоваться произвольным базисом и матрицей, удовлетворяющей (I.2.13) или (I.2.17). Каждому оператору $\mathcal{L}$ можно поставить в соответствие число $\det \mathcal{L}$, называемое определителем оператора. Для этого заметим, что если в базисе $\{e_i\}$ оператор $\mathcal{L}$ имеет матрицу

$(\mathcal{L}_i^{\,l}) = \mathcal{L}_e$, а в базисе $\{e_i'\}$ - матрицу $(\mathcal{L}_i^{\,\prime l}) = \mathcal{L}_{e'}$, то, как легко видеть, матрицы $\mathcal{L}_e, \mathcal{L}_{e'}$ подобны, т.е.

$$\mathcal{L}_{e'} = U^{-1}\mathcal{L}_e U , \qquad (I.2.18)$$

где U - унитарная матрица.

Так как при умножении матриц их определители перемножаются, то

$$det(U^{-1}) = (det\, U)^{-1}$$

$$det\, \mathcal{L}_{e'} = det\, \mathcal{L}_e$$

Мы видим, что определитель матрицы оператора $\mathcal{L}$ не зависит от выбора базиса и может быть, поэтому, назван определителем самого оператора $\mathcal{L}$.

Оператор $\mathcal{L}$ называется унимодулярным, если его определитель равен единице. В дальнейшем особую роль играют операторы, которые унитарны и унимодулярны. Найдем матрицы таких операторов для $n = 2$ и 3, в любом базисе.

При $n = 2$ они имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} , \qquad \text{где} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \qquad (I.2.19)$$

Так как каждое комплексное число определяется двумя действительными, то система всех унитарных унимодулярных матриц зависит от трех действительных параметров.

При $n = 3$ получаем матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} , \qquad (I.2.20)$$

подчиненные 7 соотношениям

$$\sum_{j=1}^{3} \bar{a}_{ij} a_{kj} = \delta_{ik} \quad (i,k = 1,2,3)$$

$$det\, \|a_{ij}\| = 1$$

Поскольку комплексное соотношение (при $i \neq k$) равносильно двум действительным, система матриц зависит от $2.3^2-10=8$ параметров.

§ 2. КОНСТРУКЦИИ НАД ПРОСТРАНСТВАМИ И ОПЕРАТОРАМИ

I. Дуальные пространства. Рассмотрим пару комплексных эвклидовых пространств $C, \tilde{C}$, векторы которых мы будем обозначать через $x, y, \dots$ (для C) и через $\tilde{x}, \tilde{y}, \dots$ (для $\tilde{C}$). Таким образом, векторы C всегда отличны от векторов $\tilde{C}$, и их не следует смешивать. Предположим, что задано скалярное умножение векторов C на векторы $\tilde{C}$, обладающее следующими свойствами:

I. $$\langle \alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y} | z \rangle = \alpha\langle \tilde{x} | z \rangle + \beta\langle \tilde{y} | z \rangle,$$
$$\langle \tilde{z} | \alpha x + \beta y \rangle = \alpha\langle \tilde{z} | x \rangle + \beta\langle \tilde{z} | y \rangle. \qquad (2.I.I)$$

II. Если $x \neq 0$, то найдется такой $\tilde{y}$, что $\langle \tilde{y} | x \rangle \neq 0$;
если $\tilde{y} \neq 0$, то найдется такой x, что $\langle \tilde{y} | x \rangle \neq 0$
(2.I.2)

Если выполнены предыдущие условия, C и $\tilde{C}$ называются дуальными пространствами (в литературе еще применяются термины: двойственные, сопряженные пространства). Векторы $\tilde{C}$, для более четкого различения от векторов C, мы будем называть ковекторами.

Комментарии

I. Скалярное произведение $\langle \tilde{x} | y \rangle$ существенно отличается от введенного выше произведения $(x | y)$: теперь речь идет о произведении векторов разных пространств. На первом месте всегда стоит ковектор, а на втором - вектор. Поэтому выражения вида $\langle x | \tilde{y} \rangle$ не рассматриваются; не имеет смысла вопрос о коммутационных свойствах произведения и о "произведении с равными сомножителями" (ср.(I.I.7), (I.I.5)).

Далее, первое свойство дистрибутивности (2.I.I) существенно отличается от первого равенства (I.I.3): числа теперь выносятся за знак произведения без комплексного сопряжения. Таковы формальные различия между скалярными произведениями $(x | y)$ и $\langle \tilde{x} | y \rangle$.

2. Чтобы понять смысл дуальности пространств, заметим, что каждый фиксированный ковектор $\tilde{y}$ определяет линейную функцию

$$\ell(x) = \langle \tilde{y} | x \rangle \qquad (2.I.3)$$

на C, и обратно, каждый фиксированный вектор x определяет линейную функцию

$$\tilde{\ell}(\tilde{y}) = \langle \tilde{y} | x \rangle \qquad (2.I.4)$$

на $\tilde{C}$. В силу уоловий (2.I.2), ненулевые векторы (ковекторы) определяют при этом ненулевые функции. Можно показать, что <u>все</u> линейные функции на C и $\tilde{C}$ могут быть получены указанным опообом о помощью ковекторов и векторов. Итак, каждое из двух дуальных пространотв можно отождествить о пространством всех линейных функций на другом.

С другой оторонь, всякую линейную функцию $\ell(x)$ на C можно также предотавить в виде "внутреннего" окалярного произведения:

$$\ell(x) = (y|x) \, , \qquad (2.I.5)$$

где y – надлежащим образом подобранный фикоированный вектор C .

Чтение этого примечания необязательно.

Сравнение (2.I.9) о (2.I.3) наводит на мысль, нельзя ли отождеотвить $\tilde{y}$ о y и, тем оамым, избежать введения дуального проотранотва. Однако, кратная функция $\lambda\ell(x)$ соответствует вектору $\bar{\lambda}y$, а не λy !

Можно было бы нотолковать $\tilde{C}$ как множеотво тех же векторов, что и C , о тем же сложением, но о другими операциями умножения на комплеконые числа и окалярного умножения: новое произведение $\lambda \circ x$ означает $\bar{\lambda}x$ в отаром омысле, а новое окалярное произведение $(x \circ y)$ означает $(y|x)$ в старом смысле. Однако во избежание путаницы удобнее считать ковекторы принадлежащие <u>другому</u> пространству, чего мы и придерживаемся в дальнейшем.

Различие между (2.I.I) и (I.I.3) теперь также становится понятным; первое равенство (I.I.3) определяет нелинейную функцию в обычном омысле, как (2.I.4), а "линейную функцию второго рода":

$$\ell(\alpha x + \beta y) = \bar{\alpha}\,\tilde{\ell}(x) + \bar{\beta}\,\tilde{\ell}(y)$$

3. Можно показать, исходя из (2.I.I) и (2.I.2), что размерноотм дуальных пространств совпадают; мы будем их впредь обозначать $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$

<u>Дуальные базиоы</u>. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базио в $C(n)$ (напомним, что мы рассматриваем только такие базиоы, и в дальнейшем олово "ортонормированный" опуокаетоя).
Можно доказать, что оуществует одиозначно определенный бази-

сом $\{e_i\}$ базис $\tilde{e}^1, \ldots, \tilde{e}^n$ в $\tilde{C}$ такой, что

$$\langle \tilde{e}^k | e_i \rangle = \delta_i^k \qquad \begin{matrix} 0 & \text{при} & i \neq k \\ 1 & \text{при} & i = k \end{matrix} \tag{2.I.6}$$

Базисы $\{e_i\}$, $\{\tilde{e}^i\}$ называются дуальными; как выяснится дальше, удобно писать номера ковекторов $\tilde{e}$ сверху.

Координаты ковектора мы, напротив, будем нумеровать нижними индексами:

$$\tilde{x} = x_i \tilde{e}^i = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{e}^i \tag{2.I.7}$$

Для скалярного произведения ковектора $\tilde{x}$ и вектора y, разложенных по дуальным базисам, получаем формулу:

$$\langle \tilde{x} | y \rangle = x_i y^i \tag{2.I.8}$$

В дальнейшем, рассматривая одновременно $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$, мы будем всегда выбирать в них дуальные базисы и вести вычисления в этом предположении.

Дуальные операторы. Операторы $\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{L}}$, действующие, соответственно, в $C(n)$ и в $\tilde{C}(n)$, называются дуальными, если для всех $\tilde{x}, y$

$$\boxed{\langle \tilde{\mathcal{L}} \tilde{x} | \mathcal{L} y \rangle = \langle \tilde{x} | y \rangle} \tag{2.I.9}$$

Найдем связь между матрицами операторов $\mathcal{L}$, $\tilde{\mathcal{L}}$. По определению чисел $\mathcal{L}_i^j$, $\tilde{\mathcal{L}}_j^k$ (ср. (I.2.2)),

$$\mathcal{L} e_i = \mathcal{L}_i^j e_j, \quad \tilde{\mathcal{L}} \tilde{e}^k = \tilde{\mathcal{L}}_j^k \tilde{e}^j, \tag{2.I.10}$$

откуда, в силу (2.I.9),

$$\langle \tilde{\mathcal{L}} \tilde{e}^k | \mathcal{L} e_i \rangle = \tilde{\mathcal{L}}_j^k \mathcal{L}_i^j = \delta_i^k \tag{2.I.11}$$

Отсюда ясно, что матрицы $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ взаимно обратны:

$$\tilde{\mathcal{L}}_i^j = (\mathcal{L}^{-1})_i^j \tag{2.I.12}$$

Если, в частности, $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ - унитарный оператор, из из (I.2.I6) следует

$$\tilde{\mathcal{U}}_i^j = \overline{\mathcal{U}_j^i} \tag{2.I.13}$$

Из (I.2.I7) теперь следует, что оператор, дуальный унитарному, унитарен в $\tilde{C}(n)$.

2. Ортогональная сумма пространств

Пусть $C(n_1), \dots, C(n_s)$ – комплексные эвклидовы пространства. Построим из них новое пространство C, векторы которого суть формальные суммы

$$\overset{1}{x} \oplus \overset{2}{x} \oplus \dots \oplus \overset{s}{x} \quad \text{, где } \overset{i}{x} \text{ - вектор } C(n_i) \qquad (2.2.1)$$

Знак $\oplus$ введен здесь в отличие от обычного знака суммы, так как "суммирование" в (2.2.I) есть просто формальное соединение векторов различных пространств в цепочку, следовательно, не сложение их в каком-либо заданном заранее пространстве.

Некоторые из чисел $n_1, \dots, n_s$ могут быть равны друг другу; в этом случае мы считаем соответствующие $C(n_i)$ различными экземплярами одного и того же пространства. Условимся выписывать $C(n_i)$ в порядке убывания чисел n_i.

Определим в C сложение векторов, умножение векторов на числа и скалярное умножение по правилам:

$$(\overset{1}{x} \oplus \dots \oplus \overset{s}{x}) + (\overset{1}{y} \oplus \dots \oplus \overset{s}{y}) = (\overset{1}{x} + \overset{1}{y}) \oplus \dots \oplus (\overset{s}{x} + \overset{s}{y}) \qquad (2.2.2)$$

(чтобы сложить векторы, надо сложить их компоненты в каждом $C(n_i)$);

$$\lambda \cdot (\overset{1}{x} \oplus \dots \oplus \overset{s}{x}) = \lambda \overset{1}{x} \oplus \dots \oplus \lambda \overset{s}{x} \qquad (2.2.3)$$

(чтобы умножить вектор на число λ, надо умножить на это число все его компоненты);

$$(x + \dots + x \,|\, y + \dots + y) = (x|y)_{C(n_1)} + \dots + (x|y)_{C(n_s)} \qquad (2.2.4)$$

(2.2.2) – (2.2.4) показывают, что <u>действия над векторами в C полностью сводятся к действиям над их компонентами в соответствующих слагаемых пространствах $C(n_i)$</u>. C называется <u>ортогональной суммой</u> пространств $C(n_1), \dots, C_{n_s}$. Часто оказывается, что пространство C, <u>содержащее</u> пространства $C(n_1), \dots, C(n_s)$, задано заранее; при этом установлен каким-либо способом однозначный закон разложения векторов C в суммы

$$x = \sum_{i=1}^{s} \overset{i}{x}, \qquad (2.2.5)$$

где $\overset{i}{x}$ - вектор $C(n_i)$.

В этом случае можно отождествить вектор x из (2.2.5) с формальной суммой (2.2.I) и писать

$$x = \overset{1}{x} \oplus \ldots \oplus \overset{s}{x} \quad ,$$

подчеркивая, таким образом, что речь идет не о какой-либо сумме векторов в C, а о "каноническом" разложении x на однозначно определенные слагаемые по установленному закону.

Если при этом справедливы правила (2.2.2) - (2.2.4), то говорят, что пространство C разложено в ортогональную сумму подпространств $C(n_1), \ldots, C(n_s)$. Итак, можно рассматривать ортогональные суммы с двух эквивалентных точек зрения: либо сначала задавать пространства $C(n_1), \ldots, C(n_s)$ независимо друг от друга и строить из них C с помощью формальных сумм (2.2.I), либо считать, что все $C(n_i)$ лежат уже в некотором пространстве C и строить разложение векторов C на слагаемые, лежащие в $C(n_i)$, $i = 1, 2, \ldots s$. Найдем базис и подсчитаем размерность C. Для этого в каждом $C(n_i)$ построим базис $\overset{i}{e}_1, \ldots, \overset{i}{e}_{n_i}$; тогда векторы

$$\overset{1}{e}_1, \ldots, \overset{1}{e}_{n_1}, \ldots, \overset{s}{e}_1, \ldots, \overset{s}{e}_{n_s} \tag{2.2.6}$$

составляют базис C. Значит, размерность C равна сумме размерностей пространств $C(n_i)$; $C = C(n_1 + \ldots + n_s)$. Тот факт, что C разлагается в ортогональную сумму пространств $C(n_i)$, записывается в виде:

$$C = C(n_1) \oplus \ldots \oplus C(n_s) \tag{2.2.7}$$

Приводимые операторы. Значение разложения пространства C в ортогональную сумму состоит в том, что такое разложение часто позволяет упростить изучение операторов, действующих в C.

Предположим, что оператор $\mathcal{L}$, действующий в C, обладает следующим свойством:

$\mathcal{L}$ переводит каждый вектор пространства $C(n_i)$ в вектор того же пространства ($i = 1, 2, \ldots, s$). Тогда говорят, что ортогональное разложение (2.2.7) приводит оператор $\mathcal{L}$. Если рассматривать действие оператора $\mathcal{L}$ только на подпространстве $C(n_i)$, то получается оператор $\mathcal{L}_i$, действующий в $C(n_i)$; отношение между оператором $\mathcal{L}$ и порожденными им операторами $\mathcal{L}_i$ записывается в виде:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_s \tag{2.2.8}$$

Обратно, если в каждом $C(n_i)$ действует оператор $\mathcal{L}_i$, то в C существует их сумма - оператор, представленный формулой (2.2.8).

Ясно, что <u>если все $\mathcal{L}_i$ унитарны, то и $\mathcal{L}$ унитарен</u>.

Если существует разложение C (не менее чем из двух слагаемых), приводящее оператор $\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ называется <u>приводимым</u>, в противном случае - <u>неприводимым</u>. Ясно, что <u>изучение приводимого оператора полностью сводится к изучению операторов</u> $\mathcal{L}_i$, каждый из которых "автономно" действует в своем подпространстве $C(n_i)$ - меньшей размерности, чем у C. Отсюда понятен интерес к неприводимым операторам и к разложению произвольных операторов на неприводимые.

В физике часто рассматривается более общее понятие приводимости для <u>системы</u> операторов. Пусть дана некоторая система (множество) операторов $\mathcal{G}$, действующих в C. Если каждый из операторов $\mathcal{G}$ переводит векторы каждого $C(n_i)$ в векторы того же $C(n_i)$, то говорят, что ортогональное разложение (2.2.7) <u>приводит</u> систему операторов $\mathcal{G}$; система $\mathcal{G}$ называется в этом случае <u>приводимой</u>. Если же не существует разложения (2.2.7), приводящего $\mathcal{G}$, то система $\mathcal{G}$ называется <u>неприводимой</u>. Заметим, что каждый отдельный оператор из $\mathcal{G}$ может оказаться приводимым, тогда как система $\mathcal{G}$ в целом - неприводимой. Мы увидим дальше, что эрмитовы и унитарные операторы всегда приводимы; между тем, существуют неприводимые системы таких операторов. Причину этого явления легко понять: для каждого отдельного оператора из $\mathcal{G}$ можно иногда подобрать приводящее его разложение, но ни одно такое разложение не приводит их <u>всех сразу</u>.

Разложению (2.2.7) соответствует базис (2.2.6), в котором можно записать каждый действующий в C оператор $\mathcal{L}$:

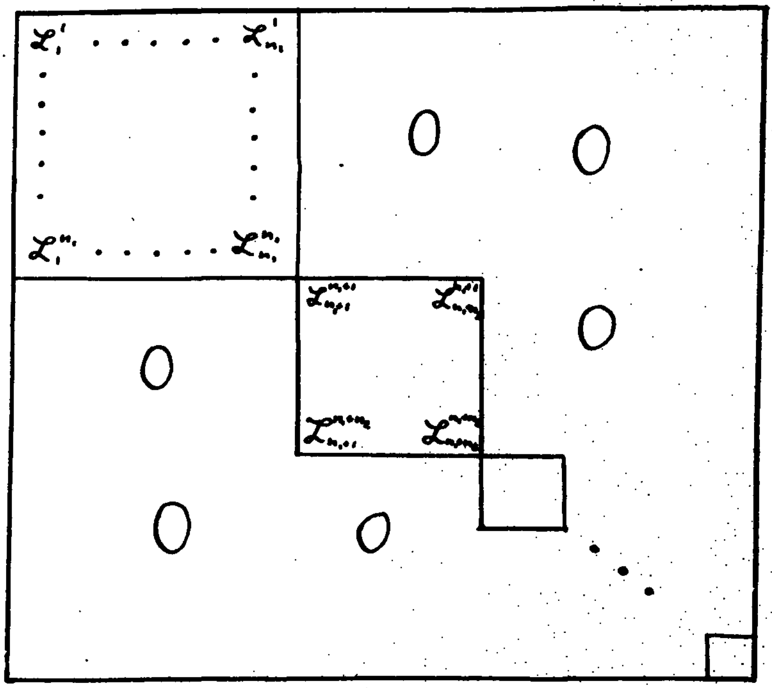
$$y^j = \mathcal{L}^j_i x^i, \quad j = 1,2,\ldots,n; \quad n = n_1 + \ldots + n_s \qquad (2.2.9)$$

Если x лежит в $C(n_k)$, то $x^i = 0$ для всех i, кроме удовлетворяющих неравенству

$$n_1 + \ldots + n_{k-1} + 1 \leq i \leq n_1 + \ldots + n_{k-1} + n_k; \qquad (2.2.10)$$

для i, удовлетворяющих (2.2.10), x^i произвольны. Для всех таких x векторы y, определяемые формулой (2.2.9), должны также иметь нулевые координаты при i, не удовлетворяющем (2.2.10). Отсюда следует, что $\mathcal{L}^j_i = 0$ при i, удовлетворяющих (2.2.10), и j, не удовлетворяющих (2.2.10). Каждый вектор из $C(n_\ell)$, где $\ell \neq k$, переводится снова в вектор $C(n_\ell)$; отсюда следует, что $\mathcal{L}^j_i$ равны нулю при j, удовлетворяющем (2.2.10), и i, не удовлетворяющем (2.2.10). Итак, $\mathcal{L}^j_i$

могут быть отличны от нуля лишь в ящиках матрицы $\mathcal{L}$, в которых оба индекса удовлетворяют одному из неравенств (2.2.10), $k = 1, \dots, s$. Таким образом, матрица приводимого оператора в специально приспособленном к разложению (2.2.7) базисе (2.2.6) имеет вид:



(2.2.11)

Из (2.2.11) ясно, как матричные элементы оператора $\mathcal{L}$ выражаются через матричные элементы операторов $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, s$. Оператор $\mathcal{L}$ называется диагонализируемым, если его приводит некоторое разложение (2.2.7) на одномерные подпространства; в этом случае, при надлежащем выборе базиса, матрица (2.2.11) оказывается диагональной:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (2.2.12)$$

<u>Собственные векторы и собственные значения</u>. Пусть $\mathcal{L}$ диагонализируем; тогда (2.2.7) имеет вид

$$C = \overset{1}{C}(1) \oplus \ldots + \overset{n}{C}(1), \qquad (2.2.13)$$

и из уравнений (2.2.8) видно, что

$$\mathcal{L} e_i = \lambda_i e_i \qquad (2.2.14)$$

Уравнение вида

$$\boxed{\mathcal{L} x = \lambda x}\,, \qquad (2.2.15)$$

где $x \neq 0$, называется <u>уравнением собственных значений</u>. Все его ненулевые решения x, при данном значении параметра λ, называются <u>собственными векторами оператора $\mathcal{L}$</u>, соответствующими λ; λ, для которого существует хотя бы один собственный вектор, называется <u>собственным значением</u> оператора $\mathcal{L}$. (2.2.14) показывает, что для диагонализируемого $\mathcal{L}$ собственными значениями служат λ_i, а собственными векторами - векторы выбранного специального базиса e_i. Обратно, если в C существует ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{L}$, то все векторы вида $\{\alpha e_i\}$, где α - комплексное число, составляют подпространство $\overset{i}{C}(1)$ пространства C, и имеет место разложения (2.2.13); тем самым $\mathcal{L}$ оказывается диагонализируемым.

Важными примерами диагонализируемых операторов являются эрмитовы операторы и унитарные операторы.

Можно доказать, что эрмитов оператор в $C(n)$ имеет ортонормированный базис, состоящий из n собственных векторов, причем все собственные значения λ действительны. Можно доказать, что унитарный оператор в $C(n)$ имеет ортонормированный базис, состоящий из n собственных векторов; соответствующие собственные значения по модулю равны единице: $\lambda_k = e^{i\varphi_k}$. Если λ - собственное значение, то все собственные векторы, принадлежащие λ (т.е. решения (2.2.15), не равные нулю) вместе с нулевым вектором образуют собственное подпространство C_λ;

размерность r этого подпространства называется кратностью λ, а собственное значение λ - r - кратно вырожденным.

В случае произвольного оператора приведение к диагональному виду, вообще говоря, невозможно. Уравнение собственных значений (2.2.15) в произвольном базисе записывается в виде

$$\left(\mathcal{L}_i^j - \lambda\delta_i^j\right)x^i = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (2.2.16)$$

и имеет нетривиальные решения x^i в том и только в том случае, когда

$$\det|\mathcal{L} - \lambda E(n)| = \det|\mathcal{L}_i^j - \lambda\delta_i^j| = 0. \qquad (2.2.17)$$

(2.2.17) называется вековым уравнением и служит для определения собственных значений; подробнее это уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} \mathcal{L}_1^1 - \lambda & \mathcal{L}_2^1 & \cdots & \mathcal{L}_n^1 \\ \mathcal{L}_1^2 & \mathcal{L}_2^2 - \lambda & \cdots & \mathcal{L}_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathcal{L}_1^n & \mathcal{L}_2^n & \cdots & \mathcal{L}_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.18)$$

Левая часть (2.2.18) есть полином n-ой степени относительно λ; следовательно, число собственных значений любого оператора не больше n.

По теореме Виета, сумма корней уравнения (2.2.18), взятых с их алгебраической кратностью (как корней уравнения, а не как собственных значений; обе кратности совпадают для диагонализируемых операторов), равна коэффициенту при λ:

$$Sp\,\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i^i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (2.2.19)$$

В п. 1.2 было доказано, что определитель оператора не зависит от выбора базиса; применяя это к (2.2.17), мы видим, что левая часть (2.2.19) является числовым инвариантом оператора $\mathcal{L}$. Инвариант $Sp\,\mathcal{L}$ называется следом $\mathcal{L}$. Другой инвариант, $\det\mathcal{L}$, по той же теореме Виета равен произведению корней:

$$\det\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad (2.2.20)$$

Для каждого оператора $\mathcal{L}$ существует однозначное разложение

$$\mathcal{L} = Sp\,\mathcal{L}\cdot E(n) + \mathcal{L}_0\,, \qquad (2.2.21)$$

где $\mathcal{E}(n)$ - тождественный оператор, а $\mathcal{L}$ - бесследный оператор (с нулевым следом).

3. Тензорное (кронеккерово) произведение пространств

Мы видели, каким образом можно из заданных пространств построить их "сумму" (2.2.7), причем операторы, действующие в "слагаемых" пространствах, также имеют "сумму" (2.2.8) - оператор, действующий в "сумме" пространств.

Другой важный способ построения более сложных пространств из более простых можно назвать "умножением"; при этом, как мы увидим, "перемножаются" и операторы, действующие в пространствах - "сомножителях", так что получается оператор, действующий в "произведении" пространств.

Начнем, для простоты, с двух пространств $C(m), C(n)$; векторы первого будем обозначать $x, x_1, x', \dots$, векторы второго - $y, y_1, y', \dots$. Базком в $C(m)$ будем обозначать через $e_1, \dots, e_m$, в $C(n)$ - через $f_1, \dots, f_n$. Рассмотрим всевозможные формальные выражения вида

$$\boxed{\sum_{i=1}^{p} x_i \otimes y_i = x_1 \otimes y_1 + \dots + x_p \otimes y_p} \qquad (2.3.1)$$

с любым числом "слагаемых" p, где x_i - векторы из $C(m)$, а y_i - из $C(n)$. Знак $\otimes$ здесь играет чисто формальную роль "разделителя" между x_i и y_i: если бы мы записывали их подряд $(x_i y_i)$, как это делалось в старой литературе, надо было бы все время помнить, что речь идет не о "внутреннем" (вроде скалярного) произведении векторов одного пространства, а о некотором формальном аналоге умножения для векторов из разных пространств. Знак + (и $\sum$) в (2.3.1) тоже имеет формальный характер и не означает суммирования ни в каком заранее заданном пространстве.

Совершенно несущественно, что "собой представляют" формальные суммы (2.3.1); существенны лишь правила действий над ними, которые сейчас будут перечислены (сравните (2.2.2) - (2.2.4)). Прежде всего, условимся считать два выражения вида (2.3.1) равными, если они могут быть получены друг из друга конечным числом следующих элементарных операций:

1. Если в (2.3.1) входит член $x \otimes y$ и $x = x' + x''$ в $C(m)$, то этот член заменяется на $x' \otimes y + x'' \otimes y$:

$$(x' + x'') \otimes y = x' \otimes y + x'' \otimes y \qquad (2.3.2)$$

Аналогично, правую часть (2.3.2), если она входит в выражение (2.3.1), можно заменить левой.

2. Аналогично, взаимозаменяемы стороны равенства

$$x \otimes (y' + y'') = x \otimes y' + x \otimes y'' \qquad (2.3.3)$$

3. Аналогично, взаимозаменяемы стороны равенства

$$\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y \qquad (2.3.4)$$

Если, в частности, можно привести выражение (2.3.1) элементарными преобразованиями к виду $0 \otimes 0$ (слева – нулевой вектор в $C(m)$, справа - нулевой вектор в $C(n)$), то оно обозначается просто через 0 ξ. Множество всех выражений вида (2.3.1), с отождествлением равных выражений, обозначим через $C(m) \otimes C(n)$. Оказывается, для выражений (2.3.1) можно установить действия сложения, умножения на комплексное число и скалярного умножения, так что $C(m) \otimes C(n)$ превращается в комплексное эвклидово пространство размерности mn (ср. случай ортогональной суммы $C(m) \oplus C(n)$, где размерности складываются !).

<u>Сумма</u> определяется по правилу:

$$(x_1' \otimes y_1' + \ldots + x_p' \otimes y_p') + (x_1'' \otimes y_1'' + \ldots + x_q'' \otimes y_q'') = \qquad (2.3.5)$$
$$= x_1' \otimes y_1' + \ldots + x_p' \otimes y_p' + x_1'' \otimes y_1'' + \ldots + x_q'' \otimes y_q''$$

Это значит, что для сложения двух выражений (2.3.1) надо их просто выписать подряд, соединив знаком плюс. Часто при этом в правой части возможны упрощения с помощью элементарных операций; например, если в оба слагаемых входит $x \otimes y$, то "приводят подобные члены":

$$x \otimes y + x \otimes y = 2x \otimes y$$

<u>Умножение на комплексное число</u> определяется по правилу:

$$\lambda(x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_p \otimes y_p) = \lambda x_1 \otimes y_1 + \ldots + \lambda x_p \otimes y_p = \qquad (2.3.6)$$
$$= x_1 \otimes \lambda y_1 + \ldots + x_p \otimes \lambda y_p ;$$

<u>Скалярное умножение</u> определяется сначала для "мономов" :

$$(x' \otimes y' | x'' \otimes y'') = (x' | x'')_{C(m)} \cdot (y' | y'')_{C(n)} , \qquad (2.3.7)$$

а затем для "полиномов":

$$\left(\sum_i x_i' \otimes y_i' \,\Big|\, \sum_j x_j'' \otimes y_j''\right) = \sum_{i,j} (x_i' \otimes y_i' \,|\, x_j'' \otimes y_j'') \qquad (2.3.8)$$

Можно показать, что эти действия удовлетворяют всем требованиям, наложенным выше на действия над векторами комплексного эвклидова пространства. Построим теперь базис и найдем размерность $C(n)\otimes C(n)$.

Если

$$x = x^i e_i, \quad y = y^j f_j,$$

то

$$x \otimes y = x^i y^j e_i \otimes f_j \qquad (2.3.9)$$

представляет разложение монома $x\otimes y$ по базисным мономам $e_i \otimes f_j$.

Разлагая таким образом все мономы в (2.3.I), мы можем представить любой вектор ξ из $C(n)\otimes C(n)$ в виде

$$\xi = \sum_{i,j} \xi^{ij} e_i \otimes f_j \qquad (2.3.10)$$

Оказывается, векторы $e_i \otimes f_j$ ортонормированы и, следовательно, составляют базис в $C(n)\otimes C(n)$; когда мы это покажем, мы тем самым найдем и размерность пространства $C(n)\otimes C(n)$, так как число векторов $e_i \otimes f_j$ $(i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n)$ равно $n n$.

По определению скалярного произведения мономов (2.3.7),

$$(e_i \otimes f_j \,|\, e_k f_l) = (e_i|e_k)\cdot(f_j|f_l) = \delta_{ik}\delta_{jl};$$

правая часть отлична от нуля лишь при $i=k,\ j=l$, т.е. когда векторы $e_i \otimes f_j,\ e_k \otimes f_l$ совпадают; в этом случае $\delta_{ii}\delta_{jj}=1$. Итак, можно указать ортонормированный базис пространства $C(n)\otimes C(n)$:

$$e_1\otimes f_1, e_1\otimes f_2, \dots, e_1\otimes f_n, e_2\otimes f_1, \dots, e_2\otimes f_n, \dots, e_n\otimes f_1, \dots, e_n\otimes f_n \qquad (2.3.11)$$

Будем нумеровать векторы базиса в написанном только что порядке; тогда понятно, что означают выражения: "базисный вектор номер (k,l)", "матричный элемент из (ij) -ой строки" и т.д.

4. Тензорное произведение операторов. Пусть в $C(n)$ действует оператор $\mathcal{M}$, в $C(n)$ – оператор $\mathcal{N}$. Мы построим по этим операторам новый оператор $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$, действующий в $C(n)\otimes C(n)$.

Так как мы хотим определить линейный оператор, то достаточно указать, как нужный нам оператор действует на мономы; по линейности он будет тогда определен для всех полиномов (2.3.I).

Положим $\boxed{\mathcal{L}(x\otimes y)=\mathcal{M}x\otimes Ny}$;

(2.4.I)

тогда оператор $\mathcal{L}$, действующий на $C(n)\otimes C(n)$, обозначается через $\mathcal{M}\otimes N$ и называется тензорным (кронеккеровым) произведением оператора $\mathcal{M}$, действующего на $C(n)$, и оператора N, действующего на $C(n)$. Фиксируем базисы $e_i, f_j, e_i\otimes f_j$ и выразим матрицу оператора $\mathcal{M}\otimes N$ через матрицы $\mathcal{M}$ и N. Если (см. (I.2.2))

$$\mathcal{M}e_i=\mathcal{M}_i^j e_j\ (i=1,\dots,n)\quad Nf_k=N_k^l f_l\ (k=1,\dots,n),$$

то

$$\mathcal{L}(e_i\otimes f_j)=\mathcal{M}e_i\otimes Nf_j=\mathcal{M}_i^k e_k\otimes N_j^l f_l=\mathcal{M}_i^k N_j^l e_k\otimes f_l$$

Следовательно, матричный элемент оператора $\mathcal{L}$, стоящий в строке (k,l) и столбце (i,j), равен $\mathcal{M}_i^k N_j^l$. Если базисные векторы в $C(n)\otimes C(n)$ занумерованы по правилу (2.3.II), то можно записать матрицу оператора $\mathcal{M}\otimes N$ в виде :

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}\mathcal{M}_1^1N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_1^1N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_1^1N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_1^1N_n^n\end{matrix} &
\begin{matrix}\mathcal{M}_2^1N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_2^1N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_2^1N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_2^1N_n^n\end{matrix} & &
\begin{matrix}\mathcal{M}_n^1N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_n^1N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_n^1N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_n^1N_n^n\end{matrix}\\ \hline
\begin{matrix}\mathcal{M}_1^2N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_1^2N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_1^2N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_1^2N_n^n\end{matrix} &
\begin{matrix}\mathcal{M}_2^2N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_2^2N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_2^2N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_2^2N_n^n\end{matrix} & &
\begin{matrix}\mathcal{M}_n^2N_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_n^2N_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_n^2N_1^n & \cdots & \mathcal{M}_n^2N_n^n\end{matrix}\\ \hline
 & & & \\ \hline
\begin{matrix}\mathcal{M}_1^nN_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_1^nN_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_1^nN_1^n & \cdots & \mathcal{M}_1^nN_n^n\end{matrix} &
\begin{matrix}\mathcal{M}_2^nN_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_2^nN_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_2^nN_1^n & \cdots & \mathcal{M}_2^nN_n^n\end{matrix} & &
\begin{matrix}\mathcal{M}_n^nN_1^1 & \cdots & \mathcal{M}_n^nN_n^1\\ \vdots & & \vdots\\ \mathcal{M}_n^nN_1^n & \cdots & \mathcal{M}_n^nN_n^n\end{matrix}
\end{array}\right)$$

(2.4.2)

Эта матрица называется <u>кронеккеровым произведением</u> матриц $\mathcal{M}_i^k, N_j^\ell$. Покажем, что <u>если $\mathcal{M}$ и N унитарны, то и $\mathcal{L}=\mathcal{M}\otimes N$ унитарен</u>. Для этого проверим условия унитарности (1.2.17); в следующем вычислении $\sum\limits_{(i,j)}$ означает суммирование по всем парам (i,j), $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$

$$\sum_{(i,j)} \bar{\mathcal{L}}^{(i,j)}_{(k,\ell)} \mathcal{L}^{(i,j)}_{(s,t)} = \sum_{(i,j)} \bar{\mathcal{M}}^i_k \bar{N}^j_\ell \mathcal{M}^i_s N^j_t = \Big(\sum_i \bar{\mathcal{M}}^i_k \mathcal{M}^i_s\Big)\Big(\sum_j \bar{N}^j_\ell N^j_t\Big) = \delta_{ks}\cdot\delta_{\ell t}$$

что и требовалось доказать.

5. <u>Случай любого числа сомножителей</u>

Совершенно аналогично определяется тензорное произведение любого числа пространств

$$C(n)=C(n_1)\otimes\dots\otimes C(n_s),\quad n=n_1,\dots,n_s, \tag{2.5.1}$$

векторы которого имеют вид

$$\sum_j \overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j\ , \text{ где } \overset{i}{x} \text{ — вектор из } C(n)\ . \tag{2.5.2}$$

По определению, оправедливы равенства

$$\overset{1}{x}\otimes\dots\otimes(\overset{i}{x}'+\overset{i}{x}'')\otimes\dots\otimes\overset{s}{x} = \overset{1}{x}\otimes\dots\otimes\overset{i}{x}'\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}+\overset{1}{x}\otimes\dots\otimes\overset{i}{x}''\otimes\dots\otimes\overset{s}{x},$$
$$\lambda\overset{1}{x}\otimes\overset{2}{x}\otimes\dots\otimes\overset{s}{x} = \overset{1}{x}\otimes\lambda\overset{2}{x}\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}=\dots=\overset{1}{x}\otimes\overset{2}{x}\otimes\dots\otimes\lambda\overset{s}{x} \tag{2.5.3}$$

Замена левой части такого равенства правой или наоборот есть элементарная операция над полиномом (2.5.2); полиномы считаются равными, если переводятся друг в друга элементарными операциями. Действия над векторами из $C(n)$ (т.е. над полиномами (2.5.2), среди которых равные отождествляются и считаются одним и тем же вектором) определяются формулами

$$\sum_{j=1}^{a}\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j+\sum_{j=a+1}^{b}\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j=\sum_{j=1}^{a+b}\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j\ ,$$
$$\lambda\sum_j\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j=\sum_j\lambda\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}_j=\dots=\sum_j\overset{1}{x}_j\otimes\dots\otimes\lambda\overset{s}{x}_j\ , \tag{2.5.4}$$
$$\Big(\sum_i\overset{1}{x}'_i\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}'_i\ \Big|\ \sum_j\overset{1}{x}''_j\otimes\dots\otimes\overset{s}{x}''_j\Big)=\sum_{i,j}\prod_{k=1}^{s}(\overset{k}{x}'_i|\overset{k}{x}''_j)$$

Наконец, если в каждом пространстве $C(n_i)$ действует оператор $\mathcal{L}_i$, то можно определить тензорное произведение $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\otimes\dots\otimes\mathcal{L}_s$ этих операторов, как оператор, действующий на мономы по правилу

$$\mathcal{L}(\overset{1}{x}\otimes\dots\otimes\overset{s}{x})=\mathcal{L}_1(\overset{1}{x})\otimes\dots\otimes\mathcal{L}_s(\overset{s}{x}) \tag{2.5.5}$$

Тензорное произведение любого числа унитарных операторов есть унитарный оператор.

§ 3. ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА НАД КОМПЛЕКСНЫМ ЭВКЛИДОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

I. Определение

Наиболее естественное и удобное для интересующих нас приложений определение тензора состоит в следующем. Фиксируем размерность n ; возьмем p экземпляров $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \dots, \overset{p}{C}$ пространства $C(n)$ и q экземпляров $\underset{1}{\tilde{C}}, \underset{2}{\tilde{C}}, \dots, \tilde{C}_q$ дуального пространства $\tilde{C}(n)$. Тогда можно построить комплексное эвклидово пространство

$$C(p,q) = \overset{1}{C} \otimes \overset{2}{C} \otimes \dots \otimes \overset{p}{C} \otimes \underset{1}{\tilde{C}} \otimes \dots \otimes \tilde{C}_q \tag{3.I.I}$$

размерности n^{p+q} . Вектор этого пространства называется тензором над $C(n)$ валентности (p,q) , или, иначе, комплексным тензором в $C(n)$, p раз контравариантным и q раз ковариантным. Вспоминая определение тензорного произведения пространств, мы можем представить тензор $T(p,q)$ из $C(p,q)$ в виде формального полинома

$$T(p,q) = \sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \dots \otimes \overset{p}{x}_j \otimes \underset{1}{\tilde{x}}^j \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{x}}^j , \tag{3.I.2}$$

где $\overset{i}{x}_j$ – вектор из $\overset{i}{C}$, $\underset{k}{\tilde{x}}^j$ – вектор из $\tilde{C}$, а индекс j служит для обозначения векторов, входящих в j -ый член суммы (3.I.2).

I. Комментарии

I) Подчеркнем, в чем состоит векторная природа тензоров; это тем более необходимо, что в старых руководствах по тензорной алгебре тензоры обычно вводятся другим (эквивалентным) способом, при котором на передний план выдвигаются другие их свойства, о которых будет речь ниже.

Единственное, что существенно для того, чтобы некоторые объекты можно было трактовать, как векторы – это возможность производить над ними действия по определенным правилам, с соблюдением общих алгебраических законов, перечисленных в начале § I. Поскольку $C(p,q)$ есть частный случай описанного выше тензорного произведения пространств, в котором такие правида действий были установлены, мы можем расоматривать формальные суммы (3.I.2) как векторы. При этом, правда, представление вектора суммой (3.I.2) не однозначно; но суммы, представляющие один и тот же вектор, отличаются друг от друга лишь простыми преобразованиями типа (2.5.3), так что представление (3.I.2) очень удобно для изображения тензоров.

Отметим, что в литературе редко вводится для тензоров скалярное произведение; это одна из причин, по которым истолкование тензора как вектора некоторого комплексного эвклидова пространства может показаться странным читателю, знакомому с тензорной алгеброй в ее "координатном" изложении.

"Векторная природа" тензоров имеет основное значение для интересующих нас физических приложений.

2) Векторы из $C(n)$ и ковекторы из $\tilde{C}(n)$ представляют частные случаи тензоров. В самом деле, $T(1,0)$ имеет вид $\sum\limits_j \overset{1}{\tilde{x}}_j = \overset{1}{\tilde{x}}$, $T(0,1)$ – вид $\sum\limits_{1} \overset{j}{x} = \underset{1}{x}$.

Моном $T(1,1)=x\otimes\tilde{y}$ можно рассматривать как оператор на $C(n)$: действие этого оператора на вектор z из $C(n)$ определяется формулой

$$Tz = \langle \tilde{y} | z \rangle x$$

Конечно, это не самый общий линейный оператор на $C(n)$; но любой такой оператор можно отождествить с некоторым полиномом, т.е. тензором типа $T(1,1) = x_i \otimes \tilde{y}^i$:

$$Tz = \langle \tilde{y}^i | z \rangle x_i \tag{3.I.3}$$

Итак, операторы в $C(n)$ представляют собой тензоры валентности (I.I).

Моном $T(0,2)=\underset{1}{x}\otimes\underset{2}{x}$ можно рассматривать как билинейную форму на $C(n)$; ее значение на паре векторов u, v определяется как

$$T(u,v) = \langle \underset{1}{x} | u \rangle \langle \underset{2}{x} | v \rangle$$

Наиболее общая билинейная форма на $C(n)$ задается тензором $T(0,2) = \sum\limits_j \underset{1}{x}^j \otimes \underset{2}{x}^j$:

$$T(u,v) = \sum_j \langle \underset{1}{x}^j | u \rangle \langle \underset{2}{x}^j | v \rangle \tag{3.I.4}$$

Итак, билинейные формы на $C(n)$ представляют собой тензоры валентности $(0,2)$.

2. <u>Задание тензора координатами</u>. Как и вектор на $C(n)$,

тензор любой валентности над $C(n)$ не требует для своего определении никаких координатных систем: это - инвариантный объект, что особенно ясно видно из формулы (3.I.2), определяющей тензор как формальное выражение, составленное из векторов и ковекторов. Но если в пространстве $C(p,q)$, векторами которого являются тензоры T валентности (p,q), введен некоторый базис, то можно найти координаты T относительно этого базиса. Напомним, как строится базис тензорного произведения пространств из базисов пространств-множителей. Для этого надо, прежде всего, выбрать базис в каждом множителе; в нашем случае множители суть экземпляры $C(n)$ или $\tilde{C}(n)$. Фиксируем базис $e_1,\dots,e_n$ в $C(n)$ и дальний базис $\tilde{e}^1,\dots,\tilde{e}^n$ в $\tilde{C}(n)$; в пространстве $\overset{i}{C}$ - i -ом экземпляре $C(n)$ - возьмем в качестве базиса i -ый экземпляр базиса $C(n)$, состоящий из векторов $\overset{i}{e}_1,\dots,\overset{i}{e}_n$, и аналогично в $\tilde{C}$ - k -ый экземпляр базиса $\tilde{e}^1,\dots,\tilde{e}^n$, состоящий из векторов $\underset{k}{\tilde{e}}^1,\dots,\underset{k}{\tilde{e}}^n$. Тогда базисные векторы пространства $C(p,q)$ имеют вид:

$$\overset{1}{e}_{\alpha_1}\otimes\overset{2}{e}_{\alpha_2}\otimes\dots\otimes\overset{p}{e}_{\alpha_p}\otimes\underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1}\otimes\dots\otimes\underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q} \qquad (3.2.1)$$

где индексы $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\beta_1,\beta_2,$ пробегают независимо значения от I до n. Заметим, что было бы очень неудобно нумеровать векторы (3.2.I) при помощи одного индекса, хотя это можно было бы сделать, расположив их в последовательность по некоторому правилу (ср. (2.3.II)). Мы видели, однако, что уже для простейших вычислений с координатами удобнее "многоиндексная" система нумерации (ср. доказательство унитарности $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ в § I).

Обозначим поэтому базисный вектор (или, что то же, базисный тензор) (3.2.I) через $e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p}$. Тогда для любого монома

$$T_0=\overset{1}{x}\otimes\dots\otimes\overset{p}{x}\otimes\underset{1}{\tilde{x}}\otimes\dots\otimes\underset{q}{\tilde{x}} \qquad (3.2.2)$$

имеем

$$\overset{i}{x}=\overset{i}{x}{}^j\overset{i}{e}_j,\quad \underset{k}{x}=\underset{k}{x}_\ell\,\underset{k}{\tilde{e}}^\ell,$$

$$T_0=\overset{1}{x}{}^{\alpha_1}\overset{2}{x}{}^{\alpha_2}\dots\overset{p}{x}{}^{\alpha_p}\underset{1}{x}_{\beta_1}\dots\underset{q}{x}_{\beta_q}e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p} \qquad (3.2.3)$$

Любой тензор $T(p,q)$ имеет поэтому разложение вида

$$\boxed{T(p,q)=T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p}} \qquad (3.2.4)$$

Числа $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ и есть координаты тензора $T(p,q)$ в выбранном базисе (3.2.I). Для векторов $(T(1,0))$ и ковекторов $(T(0,1))$ мы снова получаем их координаты в $C(n)$, соответственно, в $\tilde{C}(n)$:

$$T(1,0) = T^{\alpha} e_{\alpha} \,, \quad T(0,1) = T_{\beta} \tilde{e}^{\beta}$$

Для тензоров валентности (I.I) имеем

$$T(1,1) = T^{\alpha}_{\beta}\, e_{\alpha} \otimes \tilde{e}^{\beta}$$

Согласно (3.I.3), действие оператора $T(1,1)$ на вектор $z = z^i e_i$ задается формулой

$$u = T(1,1) z = T^{\alpha}_{\beta} < \tilde{e}^{\beta} | z > e_{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta} z^{\beta} e_{\alpha}$$

или

$$u^{\alpha} = T^{\alpha}_{\beta} z^{\beta} \tag{3.2.5}$$

Мы возвращаемся к обычной записи оператора в координатах. Аналогично, тензор

$$T(0,2) = T_{\beta_1 \beta_2} e^{\beta_1} \otimes e^{\beta_2}$$

определяет, согласно (3.I.4), билинейную форму

$$T(u,v) = T_{\beta_1 \beta_2} u^{\beta_1} v^{\beta_2} \tag{3.2.6}$$

3. Индуцированный оператор. Пусть в $C(n)$ действует оператор $\mathcal{L}$; тогда, как мы видели, в дуальном пространстве $\tilde{C}(n)$ определен дуальный оператор $\tilde{\mathcal{L}}$. Возьмем в i -ом экземпляре $C(n)$ (т.е. в $\overset{i}{C}$) оператор $\overset{i}{\mathcal{L}}$ - i -ый экземпляр $\mathcal{L}$, а в k -ом экземпляре $\tilde{C}(n)$ (т.е. в $\underset{k}{\tilde{C}}$) оператор $\underset{k}{\tilde{\mathcal{L}}}$ - k -ый экземпляр $\tilde{\mathcal{L}}$. Тогда в $C(p,q)$ действует тензорное произведение операторов

$$\overline{\mathcal{L}} = \overset{1}{\mathcal{L}} \otimes \dots \otimes \overset{p}{\mathcal{L}} \otimes \underset{1}{\tilde{\mathcal{L}}} \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{\mathcal{L}}} \tag{3.3.I}$$

Прежде чем выяснять детальнее, как действует оператор $\overline{\mathcal{L}}$, отметим формальный смысл только что проведенной конструкции; по данному оператору $\mathcal{L}$, действующему на векторы x из $C(n)$, мы построили стандартным образом оператор $\overline{\mathcal{L}}$, действующий на векторы $T(p,q)$ из пространства $C(p,q)$. Этот закон соответствия, по которому оператору в n -мерном пространстве составится в соответствие оператор в пространстве другой, вообще говоря, более высокой размерности, имеет основное значение для теории представлений, развиваемой ниже.

Обозначим это соответствие символом Π :

$$\overset{\frown}{\mathcal{L}} = \Pi \mathcal{L} \qquad (3.3.2)$$

$\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ называется оператором, <u>индуцированным</u> $\mathcal{L}$ в $C(p,q)$

Посмотрим теперь подробнее, как действует оператор $\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ на вектор $T(p,q)$. Поскольку $\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ линеен, достаточно рассмотреть, как $\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ действует на базисные векторы (3.2.I); по определению тензорного произведения операторов (2.5.5), $\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ действует "почленно":

$$\overset{\frown}{\mathcal{L}}(e^{1}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes e^{p}_{\alpha_p} \otimes \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \tilde{e}^{\beta_q}) = \overset{1}{\mathcal{L}}(e^{1}_{\alpha_1}) \otimes \ldots \otimes \overset{p}{\mathcal{L}}(e^{p}_{\alpha_p}) \otimes \tilde{\mathcal{L}}_1(\tilde{e}^{\beta_1}) \otimes \ldots \otimes \tilde{\mathcal{L}}_q(\tilde{e}^{\beta_q}). \qquad (3.3.3)$$

Но в выбранных базисах имеем (см. (2.I.I0)):

$$\overset{i}{\mathcal{L}} e^{i}_{\alpha} = \mathcal{L}^{\gamma}_{\alpha} e_{\gamma}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_k \tilde{e}^{\beta}_{k} = \tilde{\mathcal{L}}^{\beta}_{\delta} \tilde{e}^{\delta}_{k}, \qquad (3.3.4)$$

поскольку все операторы $\overset{i}{\mathcal{L}}$ имеют одну и ту же матрицу $\mathcal{L}^{\gamma}_{\alpha}$, а все операторы $\tilde{\mathcal{L}}_k$ – одну и ту же матрицу $\tilde{\mathcal{L}}^{\beta}_{\delta}$.
Поэтому

$$\overset{\frown}{\mathcal{L}}(e^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}) = \mathcal{L}^{\gamma_1}_{\alpha_1} \ldots \mathcal{L}^{\gamma_p}_{\alpha_p} \tilde{\mathcal{L}}^{\beta_1}_{\delta_1} \ldots \tilde{\mathcal{L}}^{\beta_q}_{\delta_q} e^{\delta_1 \ldots \delta_q}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}, \qquad (3.3.5)$$

и мы нашли матричные элементы оператора $\overset{\frown}{\mathcal{L}}$ в базисе (3.2.I). В силу общего выражения для линейного оператора в координатах (I.2.3), мы можем теперь записать уравнение

$$T' = \overset{\frown}{\mathcal{L}} T \qquad (3.3.6)$$

в координатной форме:

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \mathcal{L}^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{L}^{\alpha_p}_{\gamma_p} \tilde{\mathcal{L}}^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots \tilde{\mathcal{L}}^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q} \qquad (3.3.7)$$

Согласно (2.I.I2), то же можно записать в виде:

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \mathcal{L}^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{L}^{\alpha_p}_{\gamma_p} (\mathcal{L}^{-1})^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots (\mathcal{L}^{-1})^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q} \qquad (3.3.8)$$

Если $\mathcal{L} = \mathcal{U}$ – унитарный оператор, действующий в $C(n)$ (случай, нужный как в дальнейшем), то можно записать (3.3.8) в двух видах (см. 2.I.I3):

$$\boxed{T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \mathcal{U}^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots \mathcal{U}^{\alpha_p}_{\gamma_p} (\mathcal{U}^{-1})^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots (\mathcal{U}^{-1})^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}} \qquad (3.3.9)$$

$$T'^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q} = \sum_{\gamma,\delta} u^{\alpha_1}_{\gamma_1}\dots u^{\alpha_p}_{\gamma_p}\bar{u}^{\beta_1}_{\delta_1}\dots\bar{u}^{\beta_q}_{\delta_q} T^{\gamma_1\dots\gamma_p}_{\delta_1\dots\delta_q} \qquad (3.3.9)$$

"Неудачный" вид ~~формулы~~ второй (3.3.9) (суммирование не по правилу Эйнштейна) связан с тем, что операция перехода от матрицы к комплексно сопряженной матрице не имеет инвариантного (не зависящего от выбора базиса) смысла. В качестве основной формулы следует рассматривать (3.3.8).

Подчеркнем еще раз, что формула (3.3.8) представляет особой запись в координатах действия в пространстве $C(p,q)$ оператора $\overline{\mathcal{L}}$, индуцированного действующим в $C(n)$ оператором $\mathcal{L}$. Матрица оператора $\overline{\mathcal{L}}$ есть квадратная матрица рядности n^{p+q}. Можно занумеровать базисные векторы $e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p}$ некоторым стандартным способом.

Например, условимся считать, что система чисел $(\alpha_1',\dots,\alpha_p')$ предшествует $(\alpha_1'',\dots,\alpha_p'')$, если для некоторого j $\alpha_i'=\alpha_i''$ $(i\leq j-1)$, но $\alpha_j'<\alpha_j''$; аналогично упорядочим системы $(\beta_1,\dots,\beta_q)$. Тогда можно считать, что вектор $e^{\beta_1'\dots\beta_q'}_{\alpha_1'\dots\alpha_p'}$ предшествует $e^{\beta_1''\dots\beta_q''}_{\alpha_1''\dots\alpha_p''}$, если либо система $(\alpha_1',\dots,\alpha_p')$ предшествует системе $(\alpha_1'',\dots,\alpha_p'')$, либо обе системы совпадают, но система $(\beta_1',\dots,\beta_q')$ предшествует системе $(\beta_1'',\dots,\beta_q'')$. Тогда в (3.3.5) упорядочены последовательности "строчных индексов" $(\gamma_1\dots\gamma_p\delta_1\dots\delta_q)$ и "столбцовых индексов" $(\alpha_1\dots\alpha_p\beta_1\dots\beta_q)$ (ср. с формулой (I.2.2) !).

Теперь уже нетрудно расположить числа

$$\mathcal{L}^{\gamma_1}_{\alpha_1}\dots\mathcal{L}^{\gamma_p}_{\alpha_p}\tilde{\mathcal{L}}^{\beta_1}_{\delta_1}\dots\mathcal{L}^{\beta_q}_{\delta_q}$$

в квадратную таблицу – матрицу оператора $\overline{\mathcal{L}}$ в базисе (3.2.I). Мы не пытаемся изобразить такую таблицу в общем случае; в случае $p=2$, $q=0$ она имеет вид (2.3.II), с $m=n$ и $M=N=\mathcal{L}$.

Докажем теперь следующее свойство соответствия Π: если операторы $\mathcal{L}'$, $\mathcal{L}''$ действуют в $C(n)$, $\mathcal{L}=\mathcal{L}'\mathcal{L}''$ и $\mathcal{L}',\mathcal{L}'',\mathcal{L}$ индуцируют операторы $\overline{\mathcal{L}'},\overline{\mathcal{L}''},\overline{\mathcal{L}}$, действующие в $C(p,q)$, то $\overline{\mathcal{L}}=\overline{\mathcal{L}'}\,\overline{\mathcal{L}''}$; или, иными словами,

$$\Pi(\mathcal{L}'\mathcal{L}'')=\Pi(\mathcal{L}')\,\Pi(\mathcal{L}'') \qquad (3.3.10)$$

Достаточно проверить, что $\overline{\mathcal{L}}$ и $\overline{\mathcal{L}'}\,\overline{\mathcal{L}''}$ принимают одинаковые значения на базисных векторах (3.2.I); согласно определению тензорного произведения операторов (2.5.5),

$$\tilde{\mathcal{U}}(e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p}) = \tilde{\mathcal{U}}(\acute{e}_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes\acute{e}_{\alpha_p}\otimes\tilde{e}^{\beta_1}\otimes\dots\otimes\tilde{e}^{\beta_q}) =$$
$$= \acute{\mathcal{U}}(\acute{e}_{\alpha_1})\otimes\dots\otimes\acute{\mathcal{U}}(\acute{e}_{\alpha_p})\otimes\tilde{\mathcal{U}}(\tilde{e}^{\beta_1})\otimes\dots\otimes\tilde{\mathcal{U}}(\tilde{e}^{\beta_q}) =$$
$$= \acute{\mathcal{U}}'\acute{\mathcal{U}}''(\acute{e}_{\alpha_1})\otimes\dots\otimes\acute{\mathcal{U}}'\acute{\mathcal{U}}''(\acute{e}_{\alpha_p})\otimes\tilde{\mathcal{U}}'_1\tilde{\mathcal{U}}''_1(\tilde{e}^{\beta_1})\otimes\dots\otimes\tilde{\mathcal{U}}'_q\tilde{\mathcal{U}}''_q(\tilde{e}^{\beta_q}) =$$
$$= \tilde{\mathcal{U}}'(\acute{\mathcal{U}}''(\acute{e}_{\alpha_1})\otimes\dots\otimes\acute{\mathcal{U}}''(\acute{e}_{\alpha_p})\otimes\tilde{\mathcal{U}}_1(\tilde{e}^{\beta_1})\otimes\dots\otimes\tilde{\mathcal{U}}''_q(\tilde{e}^{\beta_q})) =$$
$$= \tilde{\mathcal{U}}'\tilde{\mathcal{U}}''(e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p})$$

Можно доказать (3.3.9) также вычислением матричных элементов $\tilde{\mathcal{U}}'\tilde{\mathcal{U}}''$; при этом надо принять во внимание, что оператор, дуальный $\mathcal{U}'\mathcal{U}''$, есть $\tilde{\mathcal{U}}'\tilde{\mathcal{U}}''$, а действие дуального оператора описывается в координатах формулой (2.I.IO).

Покажем, что если $\mathcal{U}$ – унитарный оператор в $C(n)$, то и индуцированный оператор $\tilde{\mathcal{U}} = \Pi\mathcal{U}$ – унитарный в $C(p,q)$. Достаточно доказать равенство

$$(\tilde{\mathcal{U}}T|\tilde{\mathcal{U}}S) = (T|S) \qquad (3.3.10)$$

для случая, когда T, S – базисные векторы (3.2.I). Но, согласно определению (3.3.3),

$$\tilde{\mathcal{U}}T = \tilde{\mathcal{U}}e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p} = \acute{\mathcal{U}}\acute{e}_{\alpha_1}\otimes\dots\otimes\acute{\mathcal{U}}\acute{e}_{\alpha_p}\otimes\tilde{\mathcal{U}}_1\tilde{e}^{\beta_1}\otimes\dots\otimes\tilde{\mathcal{U}}_q\tilde{e}^{\beta_q},$$
$$\tilde{\mathcal{U}}S = \tilde{\mathcal{U}}e^{\varepsilon_1\dots\varepsilon_q}_{\sigma_1\dots\sigma_p} = \acute{\mathcal{U}}\acute{e}_{\sigma_1}\otimes\dots\otimes\acute{\mathcal{U}}\acute{e}_{\sigma_p}\otimes\tilde{\mathcal{U}}_1\tilde{e}^{\varepsilon_1}\otimes\dots\otimes\tilde{\mathcal{U}}_q\tilde{e}^{\varepsilon_q}.$$

По определению скалярного произведения в $C(p,q)$ (2.3.8),

$$(\tilde{\mathcal{U}}T|\tilde{\mathcal{U}}S) = (\mathcal{U}e_{\alpha_1}|\mathcal{U}e_{\sigma_1})\dots(\mathcal{U}e_{\alpha_p}|\mathcal{U}e_{\sigma_p})(\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^{\beta_1}|\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^{\varepsilon_1})\dots(\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^{\beta_q}|\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^{\varepsilon_q})$$

Наконец, оператор, дуальный $\mathcal{U}$ есть унитарный оператор в $\tilde{C}(n)$, как было доказано в §(2.1); поэтому $(\mathcal{U}e_\alpha|\mathcal{U}e_\sigma) = (e_\alpha|e_\sigma)$, $(\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^\beta|\tilde{\mathcal{U}}\tilde{e}^\varepsilon) = (\tilde{e}^\beta|\tilde{e}^\varepsilon)$, и (3.3.IO) доказана.

4. Другие способы определения тензора

а) Тензор как закон преобразования. Мы видели, что тензор $T(p,q)$ в произвольном базисе имеет координаты $T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}$.

$$T(p,q) = T^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_q}\, e^{\beta_1\dots\beta_q}_{\alpha_1\dots\alpha_p}. \qquad (3.4.1)$$

Выберем новый базис в $C(p,q)$:

$$e'^{\delta_1\dots\delta_q}_{\gamma_1\dots\gamma_p} = \overset{1}{e}'_{\gamma_1}\otimes\dots\otimes\overset{p}{e}'_{\gamma_p}\otimes\underset{1}{e}'^{\delta_1}\otimes\dots\otimes\underset{q}{e}'^{\delta_q}.$$

~~в пространстве $C(p,q)$~~. Разлагая <u>тот же</u> тензор $T(p,q)$ по базису (3.4.2), имеем

$$T(p,q) = T'^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\delta_1 \dots \delta_q}\, e'^{\delta_1 \dots \delta_q}_{\gamma_1 \dots \gamma_p} \tag{3.4.3}$$

Можно получить базис e' из базиса e действием некоторого унитарного оператора U в $C(n)$:

$$U e_i = e'_i \tag{3.4.4}$$

Тогда

$$e_i = (U^{-1})_i^j e'_j \ , \tag{3.4.5}$$

или (ср. (1.2.2), выражая $U^{-1}e'_i$ через векторы базиса e', имеем:

$$e_i = (U^{-1})^j_i e'_j \tag{3.4.6}$$

Для дуальных базисов $\tilde{e}^i$ и $\tilde{e}'^i$ имеем (ср. (2.1.11)):

$$\langle \tilde{U}^{-1} \tilde{e}'^k | e_i \rangle = \langle \tilde{U}^{-1} \tilde{e}'^k | U^{-1} e'_i \rangle = \langle \tilde{e}'^k | e'_i \rangle = \delta_i^k \ ,$$

следовательно,

$$\tilde{U}^{-1} \tilde{e}'^k = \tilde{e}^k \tag{3.4.7}$$

Но, согласно (2.1.12),

$$(\tilde{U}^{-1})_i^j = U_i^j$$

так что (3.4.7) можно переписать в виде

$$\tilde{e}^k = U^k_j \tilde{e}'^j \tag{3.4.8}$$

Подставляя выражения (3.4.6), (3.4.8) в (3.2.1), получаем:

$$e^{\beta_1 \dots \beta_q}_{\alpha_1 \dots \alpha_p} = (U^{-1})^{\gamma_1}_{\alpha_1} \cdots (U^{-1})^{\gamma_p}_{\alpha_p} U^{\beta_1}_{\delta_1} \cdots U^{\beta_q}_{\delta_q} e'^{\delta_1 \dots \delta_q}_{\gamma_1 \dots \gamma_p} \tag{3.4.9}$$

Подставляя теперь правую часть в (3.4.1) и сравнивая коэффициенты при соответствующих базисных векторах, найдем выражение "новых" координат тензора $T(p,q)$ через "старые":

$$T'^{\gamma_1 \dots \gamma_p}_{\delta_1 \dots \delta_q} = (U^{-1})^{\gamma_1}_{\alpha_1} \cdots (U^{-1})^{\gamma_p}_{\alpha_p} U^{\beta_1}_{\delta_1} \cdots U^{\beta_q}_{\delta_q} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \tag{3.4.10}$$

(3.4.10) имеет <u>формальное</u> сходство с (3.3.8), но смысл этих формул совершенно различен: (3.3.8) выражает координаты тензора T' через координаты в том же базисе <u>другого</u> тензора T, из которого T' получается действием оператора $\overline{\mathcal{U}}$; тогда как (3.4.10) выражает координаты тензора T в новом базисе через координаты того же тензора в старом базисе пространства $C(p,q)$, а оператор $\mathcal{U}$ переводит векторы старого базиса e_i в векторы нового базиса $e_{i'}$. Пусть теперь (отвлекаясь от всего, что мы знаем о пространствах $C(p,q)$) каждому базису в $C(n)$ поставлена в соответствие некоторая система из n^{p+q} чисел $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$, причем закон соответствия таков, что системы чисел, соответствующие разным базисам, связаны соотношениями (3.4.10).

Тогда, как можно показать, существует один и только один тензор $T(p,q)$ из пространства $C(p,q)$, имеющий в каждом базисе координаты, равные заданным числам $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$. Поэтому можно было бы определить тензор, как закон соответствия $e \to T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$, обладающий свойством (2.4.10). Такое определение, выдвигающее на передний план закон преобразования координат, неудобно для излагаемой дальше теории, где, например, важно знать собственные значения некоторых операторов на пространстве тензоров $C(p,q)$. Ясно, что при этом надо, прежде всего, представлять себе тензор как элемент векторного пространства $C(p,q)$. Такая точка зрения и принята в этих лекциях.

в). Тензор как полилинейная функция. Другой способ определения тензора основан на следующем замечании. Пусть задан произвольный набор ξ из p ковекторов и q векторов:

$$\xi = (\overset{1}{\tilde{y}},\ldots,\overset{p}{\tilde{y}},\overset{1}{y},\ldots,\overset{q}{y})$$

Тогда можно для тензора $T(p,q)$ (3.1.2) определить значение на ξ по формуле

$$T(\xi) = \sum_j \langle \overset{1}{\tilde{y}}|\overset{1}{x}_j\rangle \ldots \langle \overset{p}{\tilde{y}}|\overset{p}{x}_j\rangle\langle \overset{1}{\tilde{x}}_j|\overset{1}{y}\rangle \ldots \langle \overset{q}{\tilde{x}}_j|\overset{q}{y}\rangle \qquad (3.4.11)$$

Если закрепить все аргументы $\tilde{y}_i, y^k$, кроме одного, то получаем функцию с комплексными значениями от ковектора или вектора, и все такие функции линейны.

Пусть теперь задана произвольная функция

$$T(\overset{1}{y},\ldots,\overset{p}{y},\overset{1}{y},\ldots,\overset{q}{y})$$

от P ковекторов и q векторов, линейная относительно каждого аргумента (при закрепленных остальных); такая функция называется __полилинейной__. Можно доказать, что __все__ полилинейные функции от p ковекторов и q векторов получаются указанным выше способом из тензоров $T(p,q)$, причем разным тензорам из $C(p,q)$ соответствуют разные (не равные тождественно) полилинейные функции. Можно было бы поэтому определить тензор как полилинейную функцию; такое определение отражает существенное свойство тензоров и часто бывает полезно. В частности, мы уже видели в § 2, что ковектор $T(0,1)$ есть линейная функция от одного вектора, а вектор $T(1,0)$ – линейная функция от одного ковектора.

5. Умножение и свертывание тензоров

Мы определим теперь операции над тензорами, меняющие их валентность. Пусть даны тензоры $T(p,q)$ и $T(r,s)$:

$$T(p,q)=\sum_j \overset{1}{x}_j\otimes\overset{2}{x}_j\otimes\ldots\otimes\overset{p}{x}_j\otimes\underset{1}{\tilde{x}}^j\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\tilde{x}}^j,$$

$$T(r,s)=\sum_k \overset{1}{y}_k\otimes\overset{2}{y}_k\otimes\ldots\otimes\overset{r}{y}_k\otimes\underset{1}{\tilde{y}}^k\otimes\underset{2}{\tilde{y}}^k\otimes\ldots\otimes\underset{s}{\tilde{y}}^k, \tag{3.5.1}$$

где $\overset{i}{x}_j$, $\overset{i}{y}_k$ – векторы пространства $C(n)$, а $\underset{i}{\tilde{x}}^j, \underset{i}{\tilde{y}}^k$ – ковекторы дуального пространства $\tilde{C}(n)$. Поставим этим тензорам в соответствие тензор $T(p+r,q+s)$, называемый их __произведением__:

$$T(p+r,q+s)=T(p,q)\otimes T(r,s)=\sum_{j,k}\overset{1}{x}_j\otimes\ldots\otimes\overset{p}{x}_j\otimes\overset{1}{y}_k\otimes\ldots\otimes\overset{r}{y}_k$$

$$\otimes\underset{1}{\tilde{x}}^j\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\tilde{x}}^j\otimes\underset{1}{\tilde{y}}^k\otimes\ldots\otimes\underset{s}{\tilde{y}}^k \tag{3.5.2}$$

Существенно, что, в отличие от сложения тензоров и умножения их на число, которые производятся __в одном и том же__ пространстве тензоров данной валентности, умножение тензоров есть операция над тензорами из __разных__ пространств. $T(p,q)$ принадлежит пространству $C(p,q)$ ~~(n,3)~~, $T(r,s)$ – пространству $C(r,s)$, а произведение их $T(p+r,q+s)$ – пространству $C(p+r,q+s)$. Далее, хотя произведения

$$T(p,q)\otimes T(r,s), \quad T(r,s)\otimes T(p,q)$$

имеют одинаковую валентность, эти произведения, вообще говоря, различны; это видно уже в случае, когда перемножаются два вектора x,y, так как тензоры $x\otimes y$ и $y\otimes x$ при неколлинеарных x, y не совпадают. Итак, умножение тензоров некоммутативно (ср. с умножением операторов). Однако, свойства ассоциативности и дистрибутивности, как легко проверить, справедливы:

$$
\begin{aligned}
&(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3) \\
&T \otimes (T_1 + T_2) = T \otimes T_1 + T \otimes T_2 \\
&(T_1 + T_2) \otimes T = T_1 \otimes T + T_2 \otimes T \\
&(\lambda T_1) \otimes T_2 = T_1 \otimes (\lambda T_2) = \lambda (T_1 \otimes T_2)
\end{aligned}
\qquad (3.5.3)
$$

Заметим, что в силу формулы (3.5.2) пространство $C(p+r, q+s)$ оказывается тензорным (кронеккеровым) произведением пространств $C(p,q)$, $C(r,S)$ (см. п. (2.3.)):

$$C(p+r, q+s) = C(p,q) \otimes C(r,S) \qquad (3.5.4)$$

Как мы знаем, это не означает, что <u>каждый</u> тензор $T(p+r, q+s)$ представим в виде произведения тензоров $T(p,q)$, $T(r,s)$; но каждый тензор $T(p+r, q+s)$ <u>есть сумма таких произведений</u>. В частности, <u>каждый тензор может быть получен из векторов и ковекторов с помощью сложения и умножения</u>.

Разлагая сомножители по соответствующим базисам (3.2.I), получаем простое выражение координат произведения через координаты сомножителей:

<u>Если</u> $T = T' \otimes T''$, <u>то</u>

$$T^{\alpha_1' \dots \alpha_p' \alpha_1'' \dots \alpha_r''}_{\beta_1' \dots \beta_q' \beta_1'' \dots \beta_s''} = T'^{\alpha_1' \dots \alpha_p'}_{\beta_1' \dots \beta_q'} \cdot T''^{\alpha_1'' \dots \alpha_r''}_{\beta_1'' \dots \beta_s''} \qquad (3.5.5)$$

Определим теперь другую операцию, ставящую в соответствие каждому тензору $T(p,q)$ (см. 3.5.I) тензор $T(p-1, q-1)$ (предполагая, конечно, что $p \geq 1$, $q \geq 1$). Фиксируем некоторые номера i и k, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq k \leq q$, и положим, по аналогии со следом оператора,

$$Sp_k^i\, T(p,q) = \langle \tilde{x}_i^{\,j} \mid \overset{i}{x}_j \rangle \qquad (3.5.6)$$

Легко показать, что след (3.5.6) не зависит от способа представления тензора $T(p,q)$ в виде (3.5.I) (ср. п. (3.I.)).

Теперь определим <u>свертывание</u> тензора $T(p,q)$ по i-му контравариантному и k-му ковариантному индексам формулой:

$$T(p-1, q-1) = Sp_k^i\, T(p,q) \cdot \sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \dots \otimes \overset{i-1}{x}_j \otimes \overset{i+1}{x}_j \otimes \dots \otimes \overset{p}{x}_j \otimes \qquad (3.5.7)$$

$$\otimes \underset{1}{\tilde{x}}{}^j \otimes \dots \otimes \underset{k-1}{\tilde{x}}{}^j \otimes \underset{k+1}{\tilde{x}}{}^j \otimes \dots \otimes \underset{q}{\tilde{x}}{}^j .$$

Как легко проверить, координаты свернутого тензора выражаются через координаты $T = T(p,q)$ формулой

$$T'^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\ldots\beta_q} = \sum_{\tau} T^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\tau\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\tau\beta_{k+1}\ldots\beta_q} \tag{3.5.8}$$

("Инвариантный характер" этой формулы, как и формулы (3.5.5), не нуждается в доказательстве при нашем изложении).

Введем теперь некоторый специальный тензор валентности (I.I), полезный во многих вычислениях. Мы уже рассматривали (см. (3.I.3)) тензоры, соответствующие линейным операторам в $C(n)$. Сейчас мы построим тензор, соответствующий тождественному оператору. Зададим произвольный базис e_j в $C(n)$ и построим дуальный базис $\tilde{e}^j$ в $\tilde{C}(n)$.

$$\delta = e_j \otimes \tilde{e}^j \tag{3.5.9}$$

и есть интересующий нас специальный тензор. Посмотрим, как ведут себя координаты тензора δ при переходе к другому базису e'_i. Так как оба базиса - ортонормированные, существует такой унитарный оператор $\mathcal{U}$ (в $C(n)$), что

$$\mathcal{U} e_j = e'_j$$

Согласно (2.I.I3),

$$e_j = \mathcal{U}^i_j e'_i\,, \quad \tilde{e}^j = \sum_k \bar{\mathcal{U}}^k_j \tilde{e}'^k,$$

где $\mathcal{U}^i_j$ - унитарная матрица. Поэтому (см. (I.2.I7))

$$\delta = \sum_{i,j,k} \mathcal{U}^i_j \bar{\mathcal{U}}^k_j e'_i \otimes \tilde{e}'^k = \sum_{i,k} \delta_{ik} e'_i \otimes \tilde{e}'^k = \sum_j e'_j \otimes \tilde{e}'^j$$

Следовательно, <u>координаты тензора δ в любой системе имеют одни и те же значения</u>:

$$\delta^j_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases} \tag{3.5.I0}$$

Приведенные рассуждения показывают также, что выбор базиса, с помощью которого мы определили δ в (3.5.9), безразличен.

С помощью тензора δ^j_i можно записать операцию свертывания в следующем, часто удобном, виде:

$$T'^{\alpha_1\ldots\alpha_{i-1}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}\beta_{k+1}\ldots\beta_q} = \delta^{\beta_k}_{\alpha_i} T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \tag{3.5.II}$$

Следующее предложение нам понадобится в дальнейшем. Согласно п. 3, каждому унитарному оператору $\mathcal{U}$, действующему в $C(n)$, соответствует индуцированный оператор в $C(p,q)$, который мы теперь обозначим $\prod\limits_{q}\mathcal{U}$. Аналогично строятся индуцированные операторы в $C(r,s), C(p+r,q+s)$. Легко показать, что

$$\prod_{q+s}^{p+r}\mathcal{U}=\left(\prod_{q}^{p}\mathcal{U}\right)\otimes\left(\prod_{s}^{r}\mathcal{U}\right) \tag{3.5.12}$$

(в смысле тензорного произведения операторов (2.4)).
Иными словами, <u>если оператор $\mathcal{U}$ индуцирует в пространствах $C(p,q)$ и $C(r,s)$ операторы $\overline{\mathcal{U}}', \overline{\mathcal{U}}''$, то в тензорном произведении пространств $C(p+r,q+s)=C(p,q)\otimes C(r,s)$ $\mathcal{U}$ индуцирует оператор $\overline{\mathcal{U}}$, равный тензорному произведению операторов $\overline{\mathcal{U}}', \overline{\mathcal{U}}''$</u>:

$$\overline{\mathcal{U}}=\overline{\mathcal{U}}'\otimes\overline{\mathcal{U}}'' \tag{3.5.13}$$

§ 4. <u>ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ</u>

I. <u>Группы. Определения и простейшие свойства</u>

В физике играют важную роль некоторые системы операторов, называемые <u>группами</u>. Система операторов $\mathcal{G}$ в $C(n)$ (n произвольно, но фиксировано) называется <u>группой</u>, если $\mathcal{G}$ обладает следующими свойствами:

1. Произведение двух операторов из $\mathcal{G}$ есть снова оператор из $\mathcal{G}$.
2. Тождественный (единичный) оператор $\mathcal{E}(n)$ принадлежит $\mathcal{G}$. (4.I.I)
3. Для каждого оператора $\mathcal{A}$ из $\mathcal{G}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$, и этот обратный оператор принадлежит $\mathcal{G}$.

Назовем оператор, имеющий обратный, <u>обратимым</u>; можно показать, что если оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный оператор, то этот последний определяется единственным образом. В самом деле, пусть $\mathcal{A}$ имеет обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$; это значит, что

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}=\mathcal{E}(n) \tag{4.I.2}$$

или, что то же:

если $\mathcal{A}x=y$, то $\mathcal{A}^{-1}y=x$. (4.I.3)

Можно доказать, что если обратный оператор для $\mathcal{A}$ вообще сушествует, то он определяется однозначно, причем справедливо также равенство

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}(n) \tag{4.I.4}$$

или, что то же:

если $\mathcal{A}^{-1}y = x$, то $\mathcal{A}x = y$. (4.I.5)

Нетрудно видеть, что

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}) = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1})\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{E}(n)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}(n),$$

откуда следует важное правило обращения произведения:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1} \tag{4.I.6}$$

Вообще говоря, произведение операторов некоммутативно: $\mathcal{A}\mathcal{B} \neq \mathcal{B}\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, то говорят, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют. Так, для любого $\mathcal{A}$ $\mathcal{E}(n)\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{E}(n) = \mathcal{A}$, так что $\mathcal{E}(n)$ коммутирует со всеми операторами; кратное тождественного оператора $\lambda\mathcal{E}(n)$ при любом комплексном λ также коммутирует со всеми операторами в $C(n)$. Можно показать, что никакой другой оператор, кроме $\lambda\mathcal{E}(n)$ не обладает таким свойством. Далее, $\mathcal{A}$ всегда коммутирует с $\mathcal{A}^{-1}$, как видно из (4.I.2) и (4.I.4).

Если все операторы $\mathcal{G}$ коммутируют друг с другом, то $\mathcal{G}$ называется коммутативной, или абелевой группой. Если группа $\mathcal{H}$ составляет подмножество группы $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ называется подгруппой $\mathcal{G}$.

2. Группы в матричной форме. Выберем в $C(n)$ некоторый базис $e_1, \dots, e_n$; тогда, как мы знаем (п. 2 § I), каждый оператор, в том числе и оператор из $\mathcal{G}$, имеет изображающую его матрицу $\mathcal{A}_e = [\mathcal{A}^i_j]$. Смысл матричного изображения операторов состоит в том, что уравнение

$$\mathcal{A}x = y \tag{4.2.I}$$

записывается в координатах в виде

$$y^i = \mathcal{A}^i_j x^j \tag{4.2.2}$$

Если $\mathcal{B}$ – другой оператор, то уравнение

$$\mathcal{B}z = x \tag{4.2.3}$$

в той же координатной системе записывается в виде

$$x^j = \mathcal{B}^j_k z^k \tag{4.2.4}$$

Из (4.2.1) – (4.2.4) следует, что равенство

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})z = y$$

записывается в координатах в виде:

$$y^i = \mathcal{A}^i_j \mathcal{B}^j_k z^k, \tag{4.2.5}$$

а это значит, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{B}$ изображается матрицей C с элементами $C^i_k = \mathcal{A}^i_j \mathcal{B}^j_k$. Такая матрица называется, как известно, произведением матриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$; итак, произведение операторов $\mathcal{A}\mathcal{B}$ изображается в базисе e матрицей, получаемой умножением в том же порядке матриц, изображающих сомножители:

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})_e = \mathcal{A}_e \mathcal{B}_e \tag{4.2.6}$$

Поскольку различные операторы изображаются разными матрицами, можно заменить каждый оператор g его матрицей, тождественный оператор единичной матрицей

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

и обратные операторы обратными матрицами; тогда можно вместо группы операторов $\mathcal{G}$ рассматривать соответствующую ей группу $(n \times n)$ – матриц с комплексными элементами. Такая точка зрения часто встречается в литературе; не следует, однако, забывать, что в другом базисе e' операторы из $\mathcal{G}$ будут изображаться другими матрицами, и замена "операторной группы" "матричной группой" возможна лишь в тех построениях, где пользуются с начала до конца одним фиксированным базисом.

Матричное представление дает возможность ввести в группах <u>независимые параметры</u>. <u>Все</u> обратимые операторы в $C(n)$ образуют группу; в самом деле, произведение обратимых операторов $\mathcal{A}\mathcal{B}$ имеет обратный оператор $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1}$ (см. (4.1.5)), который также обратим, поскольку $(\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{B}$; тождественный оператор $\mathcal{E}(n)$ обратим ($\mathcal{E}^{-1}_{(n)} = \mathcal{E}_{(n)}$); свойство 3 (4.1.1) также выполнено, так как каждый обратимый оператор $\mathcal{A}$ имеет обратный $\mathcal{A}^{-1}$, который обратим ($(\mathcal{A}^{-1})^{-1} = \mathcal{A}$). Обозначим группу <u>всех</u> обратимых операторов в $C(n)$ через $\mathcal{GL}(n,C)$. Все интересующие нас группы операторов в $C(n)$ будут, очевидно, подгруппами $\mathcal{GL}(n,C)$. Изобразим $\mathcal{GL}(n,C)$ матрицами, как указано выше; тогда $\mathcal{GL}(n,C)$ состоит из <u>всех</u> комплексных n – рядных обратимых матриц. Подгруппа $\mathcal{GL}(n,C)$ получается, если наложить на n^2 комплексных элементов таких матриц некоторые соотношения (аналогично тому, как накладываются связи на координаты точек динамической системы). Максимальное число таких (независимых) соотношений равно $2n^2$, так как каждый комплексный элемент n - рядной матрицы определяется двумя действительными параметрами (его действительной и мнимой частью), а <u>все</u> n - рядные матрицы описываются при помощи $2n^2$ параметров. Если число соотношений в точности <u>равно</u> $2n^2$, то группа $\mathcal{G}$, выделяемая этими соотношениями, содержит лишь изолированные друг от друга матрицы, образующие конечную или бесконечную последовательность.

Такая группа называется <u>дискретной</u>. Если же число k независимых соотношений, наложенных на элементы n - рядных матриц, меньше $2n^2$, то группа $\mathcal{G}$ может быть (по крайней мере, локально) описана при помощи $(2n^2-k)$ независимых параметров (аналогично тому, как вводятся независимые координаты Лагранжа для описания конфигураций динамической системы, подчиненной связям). В этом случае $\mathcal{G}$ называется <u>непрерывной</u> группой, или <u>группой Ли</u> размерности $2n^2-k$ (или: $(2n^2-k)$ - параметрической группой). Все эти понятия будут скоро пояснены на примерах.

3. <u>Комментарии</u>. a). Обычно понятие группы определяется более абстрактно, а именно, групповое произведение вводится во множестве элементов произвольной природы; можно, однако, показать, что ограничение группами, составленными из операторов или матриц, не составляет ущерба для приложений. Именно, большинство встречающихся в приложениях групп (например, конечные дискретные группы и компактные группы Ли) изоморфно подгруппам $\mathcal{GL}(n,c)$ (при достаточно больших n). Понимание этого замечания необязательно для дальнейшего.

b) Параметры могут быть введены в группе Ли таким образом, чтобы элементы n - рядных матриц зависели от них <u>аналитически</u>; это предполагается в дальнейшем без оговорок.

c) Как правило, группа Ли <u>в целом</u> не может быть описана одной системой параметров (как, например, сфера не может быть описана одной системой координат без особенностей). Тем не менее, можно ввести такую систему в окрестности каждого оператора; в частности, нас будет интересовать окрестность тождественного оператора $E(n)$.

d) Группы Ли обычно обладают тем свойством, что умножение оператора из группы на числа из определенного множества, например, на все не равные нулю комплексные числа, или на все действительные числа, или на все комплексные числа с модулем, равным единице, приводит снова к операторам из той же группы. Мы будем говорить, что группа Ли *допускает* умножение на соответствующие числа.

4. *Примеры групп.* Дальше следуют примеры групп, сопровождаемые подсчетом числа параметров; приведены также некоторые важные системы операторов, не являющиеся группами.

Группы Ли

а) $\underline{GL(n,C)}$ уже была рассмотрена выше; она состоит из всех обратимых операторов в $C(n)$ или (в матричном изображении) из всех комплексных обратимых n - рядных матриц и имеет размерность $2n^2$. $GL(n,C)$ допускает умножение на комплексные числа, не равные нулю.

(*Полная линейная группа*)

б) $\underline{GL(n,R)}$ состоит (в матричном изображении) из всех n - рядных обратимых матриц с действительными элементами. Чтобы выделить такие матрицы в $GL(n,C)$, надо приравнять нулю мнимые части всех n^2 элементов, что дает n^2 независимых соотношений. Таким образом, размерность $GL(n,R)$ равна n^2. (Чтобы получить естественное операторное определение $GL(n,R)$, следовало бы истолковать эту группу как группу всех обратимых операторов в *действительном* эвклидовом пространстве, на чем мы не останавливаемся). $GL(n,R)$ допускает умножение на не равные нулю действительные числа.

(*Действительная линейная группа*)

с) $\underline{SL(n,C)}$ есть подгруппа $GL(n,C)$, состоящая из всех операторов с определителем I (см. п.2 § I) или, в матричном изображении, из всех матриц с определителем I.
Так как $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det E(n) = 1$, $\det(A^{-1}) = [\det A]^{-1}$, такие операторы образуют группу. $SL(n,C)$ выделяется соотноше-

нием $\det|A^j_i|=1$, равносильным двум действительным соотношениям: $\operatorname{Re}\det|A^j_i|=1,\ \operatorname{Im}\det|A^j_i|=0$

Таким образом, размерность $SL(n,C)$ равна $2n^2-2$. $SL(n,C)$ допускает умножение только на число I.

(Специальная линейная, или унимодулярная группа)

d) $SL(n,R)$ есть подгруппа $GL(n,R)$, состоящая из матриц с определителем I.

Легко проверить, что $SL(n,R)$ есть группа размерности n^2-1 , допускающая умножение только на число I.

(Специальная действительная линейная группа)

e) $U(n)$ есть подгруппа $GL(n,C)$, состоящая из всех унитарных операторов (или, в матричном изображении, из всех унитарных матриц); см. п. 2 § I. По определению, унитарный оператор сохраняет скалярные произведения; из соотношений

$$(uV_x \mid uV_y) = (V_x \mid V_y) = (x \mid y)$$

$$(\epsilon_{(n)}x \mid \epsilon_{(n)}y) = (x \mid y)$$

$$(u^{-1}x \mid u^{-1}y) = ((u^{-1})^{+}u^{-1}x \mid y) = (uu^{-1}x \mid y) = (\epsilon_{(n)}x \mid y) = (x \mid y)$$

видно, что унитарные операторы образуют группу. Для подсчета размерности воспользуемся матричным изображением и равенствами (I.2.I7), характеризующими унитарные матрицы. Равенство вида

$$\sum_{i=1}^{n} |u^j_i|^2 = 1 \qquad (4.4.I)$$

представляет одно соотношение, наложенное на действительные и мнимые части элементов u^j_i: $\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{Re}u^j_i)^2+(\operatorname{Im}u^j_i)^2=1$; таких соотношений n $(j=1,2,\dots n)$

Равенство вида

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{u^j_i}\, u^k_i = 0 \qquad (j \neq k) \qquad (4.4.2)$$

представляет два соотношения, наложенные на действительные и мнимые части U_i^j :

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Re}\, U_i^j \,\mathrm{Re}\, U_i^k - \mathrm{Im}\, U_i^j \,\mathrm{Im}\, U_i^k) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Re}\, U_i^j \,\mathrm{Im}\, U_i^k + \mathrm{Im}\, U_i^j \,\mathrm{Re}\, U_i^k) = 0;$$

таких соотношений $2\frac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, размерность $U(n)$ равна $2n^2-n-n(n-1)=n^2$.

$U(n)$ допускает умножение на комплексные числа, но модулю равные единице (т.е. вида $e^{i\alpha}$, α действительно):

$$(e^{i\alpha}Ux|e^{i\alpha}Uy)=e^{i\alpha}\overline{e^{i\alpha}}(Ux|Uy)=(x|y)$$

В частности, операторы вида $e^{i\alpha}E(n)$ унитарны; они называются градиентными преобразованиями пространства $C(n)$. Геометрический смысл унитарных операторов заключен в их определении (I.2.I4): это вращения в комплексном эвклидовом пространстве $C(n)$.

(Унитарная группа)

f) $O(n)$ есть подгруппа $U(n)$, состоящая из действительных матриц (действительные унитарные матрицы называются ортогональными). Для таких матриц равенства (4.4.I) дают n соотношений, а равенства (4.4.2) $\frac{n(n-1)}{2}$ соотношений между действительными элементами матриц; итак, размерность $O(n)$ есть $n^2-n-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. $O(n)$ допускает умножение на числа $\pm$ I. Геометрический смысл операторов из $O(n)$ нетрудно указать: это вращения действительного эвклидова пространства.

(Ортогональная группа)

g) $SU(n)$ есть группа всех унитарных унимодулярных операторов в $C(n)$, т.е. общая часть (пересечение) подгрупп $SL(n,c)$ и $U(n)$. Чтобы получить эту подгруппу, надо (в матричном изображении) кроме $n+n(n-1)$ соотношений, выражающих унитарность, наложить еще условие унимодулярности $\det|U_i^j|=1$.

Заметим, что условие унимодулярности не является независимым от уже наложенных ранее условий унитарности: из этих последних вытекает, что $|\det \|U_{ij}\|| = 1$, так что условие унимодулярности фиксирует лишь аргумент определителя. Таким образом, здесь добавляется одно новое условие.

Размерность $SU(n)$ равна $2n^2 - n - n(n-1) - 1 = n^2 - 1$. $SU(n)$ допускает умножение только на число I.

(Специальная унитарная группа; эта группа играет центральную роль в теории элементарных частиц).

h) $SO(n)$ есть пересечение подгрупп $O(n)$ и $SL(n,c)$ к соотношениям, выделяющим $O(n)$, добавляется соотношение унимодулярности $\det |O_i^j| = 1$. Однако, каждая ортогональная матрица имеет определитель, равный $\pm$ I; в самом деле,

$$\det O \det O^{-1} = \det E(n) = 1$$

но $(O^{-1})^i_j = O^i_j$ (транспонированная матрица), так что

$\det O^{-1} = \det O$ и $(\det O)^2 = 1$. Поэтому условие $\det O = 1$ не является независимым от условий ортогональности и не уменьшает числа независимых параметров группы. В отличие от всех других групп $(a)-(h)$, группа $O(n)$ не связна: матрицу с определителем I нельзя непрерывным изменением элементов превратить в матрицу с определителем - I. $O(n)$ распадается на связные куски (компоненты), выделяемые условиями $\det O = 1$ и $\det O = -1$. Первая из этих компонент и есть $SO(n)$. Размерность $SO(n)$ равна, следовательно, размерности $O(n)$, т.е. $\frac{n(n-1)}{2}$.

$SO(n)$ допускает умножение только на число I.

(Специальная ортогональная группа)

Дискретные группы

a) S_n строится следующим образом. Возьмем в $C(n)$ базис $e_1, \ldots, e_n$ и поставим в соответствие каждому e_i некоторый $e_{m(i)}$ так, что при $i \neq j$ $m(i) \neq m(j)$ Тогда получается перестановка

$$e_i \longrightarrow e_{m(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

базисных векторов. Такую перестановку можно истолковать как оператор, переводящий e_i в $e_{m(i)}$:

$$A e_i = e_{m(i)}$$

(ср. ( ) ; мы будем называть такой оператор оператором перестановки осей.

Легко видеть, что матрица такого оператора $\mathcal{A}$ содержит в каждом столбце одну единицу и $n-1$ нулей; значит, $\det \mathcal{A} = \pm 1$. Произведение таких операторов есть снова оператор перестановки осей: если $\mathcal{A} e_i = e_{m(i)}$, $\mathcal{B} e_i = e_{k(i)}$, то

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})(e_i) = \mathcal{A}(\mathcal{B} e_i) = \mathcal{A}(e_{k(i)}) = e_{m(k(i))}$$

$E(n)$ есть тоже оператор перестановки осей, соответствующий "тождественной перестановке: $m(i) = i$. Наконец, если $\mathcal{A} e_i = e_{m(i)}$, то $\mathcal{A}^{-1} e_j = e_{k(j)}$, где $k(j)$ - такое число (из ряда I,2,...,n), что $m(k(j)) = j$. Итак, S_n есть группа (симметрическая группа). Эта группа конечна и имеет столько элементов, сколько существует перестановок из n предметов, т.е. $n!$. Ясно, что мы могли бы составить эту группу не из операторов в $C(n)$, переставляющих векторы базиса, а из перестановок каких угодно n предметов (ср. п. 3, (а)). Однако, в приложениях к физике группа S_n обычно выступает именно как "группа перестановок координатных осей"; с этой точки зрения наше изложение не представляется искусственным.

Мы видели выше, что все (интересные для приложений) группы Ли можно получить как подгруппы $\mathcal{GL}(n,c)$, накладывая те или иные соотношения. Аналогично, симметрическая группа является "универсальным вместилищем" конечных групп: каждая группа из конечного числа элементов может быть получена, как подгруппа S_n (при достаточно большом n).

б) A_n есть подгруппа S_n, состоящая из четных операторов перестановки осей, т.е. таких, определитель которых равен I. Легко подсчитать, что подгруппа A_n содержит ровно половину элементов S_n, т.е. $\frac{n!}{2}$ операторов. A_n называется знакопеременной группой.

Некоторые системы операторов, не являющиеся группами

а) Бесследные операторы. Так мы будем называть операторы $\mathcal{A}$ с нулевым следом (п. § I): $Sp\,\mathcal{A} = 0$. Сложение и вычитание бесследных операторов приводят снова к бесследным операторам, так как

$$Sp(\mathcal{A} \pm \mathcal{B}) = Sp\,\mathcal{A} \pm Sp\,\mathcal{B} \qquad (4.4.3)$$

Иначе обстоит дело с умножением: бесследные операторы не образуют группы. Простые примеры показывают, что след произведения двух таких операторов, вообще говоря, не равен нулю. Таким образом, действие умножения выводит за пределы системы бесследных операторов. Мы определим сейчас другое действие над бесследными операторами, которое приводит всегда к бесследным операторам; именно, двум операторам $\mathcal{A},\mathcal{B}$ поставим в соответствие их коммутатор или произведение Ли $[\mathcal{A},\mathcal{B}]$:

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A} \tag{4.4.4}$$

(Напомним, что сумма (разность) операторов $\mathcal{M},\mathcal{N}$ есть оператор, переводящий каждый вектор x в $\mathcal{M}x+\mathcal{N}x$ $(\mathcal{M}x-\mathcal{N}x)$; в матричном изображении сложить (вычесть) две матрицы значит сложить (вычесть) их элементы, стоящие на одинаковых местах).

Так как

$$\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{A}\mathcal{B})_i^i = \mathcal{A}_i^j\mathcal{B}_j^i = \mathcal{B}_j^i\mathcal{A}_i^j = \mathrm{Sp}\,(\mathcal{B}\mathcal{A})$$

имеем
$$\mathrm{Sp}\,(\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A}) = 0 \tag{4.4.5}$$

для любых операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}$ в $C(n)$. В частности, умножение Ли есть действие, не выводящее за пределы системы бесследных операторов. Наконец, заметим, что система бесследных операторов допускает умножение на любые комплексные числа:

$$\mathrm{Sp}\,(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\,\mathrm{Sp}\,\mathcal{A}. \tag{4.4.6}$$

Система бесследных операторов не имеет общепринятого обозначения; обозначим ее через $T\,Z(n)$.

Следующие две системы операторов (тесно связанные друг с другом) играют важную роль в физике; они не являются группами.

b) Эрмитовы операторы. Эта система состоит из всех эрмитовых операторов в $C(n)$. Из соотношений

$$((\mathcal{A}\pm\mathcal{B})^+x\,|\,y) = (x\,|\,(\mathcal{A}\pm\mathcal{B})y) = (x\,|\,\mathcal{A}y)\pm(x\,|\,\mathcal{B}y) =$$
$$= (\mathcal{A}^+x\,|\,y)\pm(\mathcal{B}^+x\,|\,y) = ((\mathcal{A}^+\pm\mathcal{B}^+)x\,|\,y)$$
$$(\mathcal{A}\pm\mathcal{B})^+ = \mathcal{A}^+\pm\mathcal{B}^+ \tag{4.4.7}$$

видно, что сложение и вычитание эрмитовых операторов приводит к таким же операторам.

Из соотношений $((\mathcal{A}\mathcal{B})^+x\,|\,y) = (x\,|\,(\mathcal{A}\mathcal{B})y) = (x\,|\,\mathcal{A}(\mathcal{B}y)) =$
$= (\mathcal{A}^+x\,|\,\mathcal{B}y) = (\mathcal{B}^+\mathcal{A}^+x\,|\,y)$,

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})^+ = \mathcal{B}^+\mathcal{A}^+ \tag{4.4.8}$$

видно, что произведение эрмитовых операторов тогда и только тогда является эрмитовым оператором, когда они коммутируют; но, пользуясь характеристикой (   ) матрицы эрмитова оператора, легко показать, что эрмитовы операторы, вообще говоря, не коммутируют друг с другом. Итак, эрмитовы операторы не образуют группы.

Мы определим сейчас действие над операторами, которые, если его применить к эрмитовым операторам, всегда приводит к эрмитову оператору. Именно, двум операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ поставим в соответствие их антикоммутатор, или антипроизведение Ін $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} \tag{4.4.9}$$

В силу (4.4.7), (4.4.8), для эрмитовых $\mathcal{A}, \mathcal{B}$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A})^+ = (\mathcal{A}\mathcal{B})^+ + (\mathcal{B}\mathcal{A})^+ = \overset{+}{\mathcal{B}}\overset{+}{\mathcal{A}} + \overset{+}{\mathcal{A}}\overset{+}{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A}$$

так что действие $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ не выводит за пределы системы эрмитовых операторов.

Далее, эта система допускает умножение на любые действительные (но не комплексные!) числа, в силу соотношений

$$((\lambda\mathcal{A})^+ x | y) = (x | \lambda\mathcal{A} y) = \lambda(x | \mathcal{A} y) = \lambda(\overset{+}{\mathcal{A}} x | y) = ((\bar{\lambda}\overset{+}{\mathcal{A}}) x | y)$$

$$(\lambda\mathcal{A})^+ = \bar{\lambda}\overset{+}{\mathcal{A}} \tag{4.4.10}$$

c) Антиэрмитовы операторы. Так называются операторы, удовлетворяющие условию

$$\overset{+}{\mathcal{A}} = -\mathcal{A} \tag{4.4.11}$$

или, в матричной форме,

$$\overset{+}{\mathcal{A}}{}^j_i = -\overline{\mathcal{A}^i_j} \tag{4.4.12}$$

Если $\mathcal{B}$ - эрмитов оператор, то $\mathcal{A} = i\mathcal{B}$ - антиэрмитов:

$$\overset{+}{\mathcal{A}} = (i\mathcal{B})^+ = -i\overset{+}{\mathcal{B}} = -i\mathcal{B} = -\mathcal{A}$$

Обратно, если $\mathcal{A}$ - антиэрмитов, то $\frac{1}{i}\mathcal{A}$ - эрмитов оператор. Сумма и разность антиэрмитовых операторов есть такой же оператор. Однако, антиэрмитовы операторы не образуют группы; действие, не выводящее за пределы системы, есть снова коммутирование. Для антиэрмитовых операторов $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ коммутатор $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ - также антиэрмитов оператор:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]^+ = (\mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A})^+ = (\mathcal{A}\mathcal{B})^+ - (\mathcal{B}\mathcal{A})^+ = \overset{+}{\mathcal{B}}\overset{+}{\mathcal{A}} - \overset{+}{\mathcal{A}}\overset{+}{\mathcal{B}} =$$

$$= (-\mathcal{B})(-\mathcal{A}) - (-\mathcal{A})(-\mathcal{B}) = \mathcal{B}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{B} = -[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$$

Система антиэрмитовых операторов допускает умножение на действительные числа. Поскольку эрмитовы и антиэрмитовы операторы, как мы видели, тесно связаны, можно вообще исключить из рассмотрения антиэрмитовы операторы. Для этого достаточно ввести в системе эрмитовых операторов, кроме антикоммутирования $\{A, B\}$, еще видоизмененное коммутирование

$$\frac{1}{i}[A, B] = \frac{1}{i}(AB - BA) \qquad (4.4.13)$$

Тогда, если A и B – эрмитовы, то $\frac{1}{i}[A, B]$, как легко проверить, тоже эрмитов оператор. Таким образом, соотношения коммутирования для эрмитовых операторов A, B, C имеют вид:

$$[A, B] = iC \qquad (4.4.14)$$

δ) Бесследные эрмитовы операторы. Эта система состоит из всех эрмитовых операторов с нулевым следом. Сложение, вычитание, умножение на действительные числа и видоизмененное коммутирование $\frac{1}{i}[A, B]$ не выводят из системы. Антикоммутирование выводит из системы, и потому не является для этой системы допустимым действием.

5. Представления групп. Каждая группа G, согласно представлению п. I, состоит из операторов, действующих в некотором $C(n)$ или (в матричной форме) из n – рядных матриц. Таким образом, каждой группе можно сопоставить число n. Понятие представления служит для установления связи между группами операторов различной рядности. Это понятие имеет важное значение для всех вопросов, где существенны свойства симметрии изучаемой системы; в частности, оно необходимо в теории элементарных частиц. Говорят, что дано k – рядное представление группы G (или гомоморфизм G в группу k – рядных операторов), если каждому оператору A из G поставлен в соответствие некоторый оператор $P(A)$, действующий в $C(k)$, причем произведению операторов из G соответствует произведение операторов в $C(k)$:

$$\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)} \qquad (4.5.1)$$

Из (4.5.I) ясно, что произведение операторов вида $P(A)$ есть оператор того же вида. Далее, если $B = E(n)$, то из (4.5.I) имеем

$$P(A) = P(A) \cdot P(E(n)) ;$$

следовательно, $P(E(n)) = E(k)$, и тождественный оператор в $C(k)$ тоже имеет вид $P(A)$. Наконец, если $B = A^{-1}$, то

$$P(A)\cdot P(A^{-1}) = P(AA^{-1}) = P(e_{(n)}) = P(e_{(n)}) = E_{(k)}$$

следовательно

$$P(A^{-1}) = [P(A)]^{-1}$$

Итак, операторы вида $P(A)$, где A пробегает все элементы $\mathcal{G}$, образуют группу, обозначим эту группу $\mathcal{P}(\mathcal{G})$.

Представление $\mathcal{P}$ можно наглядно истолковать, как некоторое "изображение" n - рядных операторов k - рядными: действие оператора A в $C(n)$ "вызывает" связанное с ним по некоторому закону действие оператора $P(A)$ в $C(k)$. Поскольку вычисление представлений составляет одну из наших основных задач, мы пока ограничимся немногими примерами, откладывая детальное изучение представлений до § . Читатель легко проверит, что в этих примерах выполнено условие (4.5.I).

a) Тождественное (или еще: фундаментальное, установочное) представление

В этом случае $k=n$ и $P(A)=A$ для всех A из $\mathcal{G}$. Каждый оператор A "изображается" самим собой.

b) Тривиальное представление. Для всех A из $\mathcal{G}$ полагается равным тождественному оператору $E_{(k)}$ (k произвольно).

c) Одномерное представление. Пусть $k=1$; положим $P(A) = \det|A|$ В этом случае комплексные числа $P(A)$ рассматриваются как однорядные матрицы. В силу свойства определителя оператора, условие (4.5.I) выполняется. Заметим, что все операторы вида $ABA^{-1}B^{-1}$ переходят при этом в $E_{(k)}$ если группа $\mathcal{G}$ некоммутативна, то порядок перемножения в существенен, а в $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ - нет:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot P(A) = P(BA)$$

Мы видим, что изображение - рядных операторов однорядными "огрубляет" их алгебраические свойства.

d) Индуцированные представления. Как мы видели в § 3, п. каждый тип тензоров $T(p,q)$ позволяет сопоставить операторам A, действующим в $C(n)$, индуцированные операторы $\Pi(A)$, действующие в $C(p,q)$. Из следует, что $\Pi(A)$ - представление полной линейной группы $\mathcal{GL}(n,C)$. Рядность этого представления равна размерности пространства $C(p,q)$, т.е. n^{p+q}. Если рассматривать вместо $\mathcal{GL}(n,c)$ некоторую ее подгруппу $\mathcal{G}$, то Π определяет n^{p+q} - рядное представление группы $\mathcal{G}$: надо рассматривать лишь те $\Pi(\mathcal{A})$, которые соответствуют операторам $\mathcal{A}$ из $\mathcal{G}$. В частности, если в качестве $\mathcal{G}$ взять $\mathcal{U}(n)$, то и операторы $\Pi(u)$ будут унитарны (п. § 3); получается <u>унитарное</u> представление группы $\mathcal{U}(n)$ операторами, действующими в пространстве $C(p,q)$. Мы увидим дальше (§), что <u>все</u> унитарные представлеяия групп $\mathcal{U}(n)$ могут быть получены этим приемом. Именно представления групп $\mathcal{U}(n)$ (особенно при = 2,3 и 6) играют основную роль в теории элементарных частиц.

Представление называется <u>точным</u>, если оно отавит в соответствие различным операторам $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ из $\mathcal{G}$ различные операторы из $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ (другой термин: гомоморфизм $\mathcal{P}$ называетсн в этом случае изоморфизмои групп $\mathcal{G}$ и $\mathcal{P}(\mathcal{G})$).

Тождествеиное представление, очевидно, точно. Тривиальное представление нетсчно, если $\mathcal{G}$ состоит не из одного оператора $E(n)$. Одномерное представление нетсчно, если $\mathcal{G}$ не абелева группа. Существует простой способ строить точные представления, который оснсван на разложении пространств в ортогональные суммы (п. §).

Если пространство $C(n_1+n_2)$ представлено в виде ортогональной суммы $C(n_1) \oplus C(n_2)$, и оператор $\mathcal{A}$ действует в $C(n_1)$, то можно определить оператор $\mathcal{A}' = P(\mathcal{A})$, действующий в $C(n_1+n_2)$ по формуле

$$\mathcal{A}'(x \oplus y) = \mathcal{A}x \oplus y$$

Если $\mathcal{A}$ имеет, в некотором базисе $C(n_1)$ матрицу $\mathcal{A}_i^j$, то при любом выборе базиса в $C(n_2)$ оператор $P(\mathcal{A})$ имеет матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \mathcal{A}_1^1 & \dots & \mathcal{A}_n^1 & \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \mathcal{A}_1^n & \dots & \mathcal{A}_n^n & \\ \hline & 0 & & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right] \tag{4.5.2}$$

Можно теперь рассматривать P как представление произвольной группы n_1- рядных операторов. Ясио, что представление P точно; мы будем говорить, для кратности, что это представление соотоит в действии оператора $\mathcal{A}$ на подпространстве $C(n_1)$ пространства $C(n_1+n_2)$. Далее, ясно, что если дано некотсрое представление Q группы $\mathcal{G}$ n-рядными операторами, то можно построить соответствующее представление $\mathcal{G}$ (n_1+n_2) - рядными оператсрами, полагая $R(\mathcal{A}) = PQ(\mathcal{A})$

Построение $\mathcal{R}$ по $\mathcal{Q}$ мы будем называть **вложением** n_1 - рядного представления в (n_1+n_2) - рядное при помощи ортогонального разложения $C(n_1) \oplus C(n_2)$.

e) Сумма представлений

Более общим образом, пусть дано k -рядное представление $\mathcal{P}$ группы $\mathcal{G}$; пусть $C(k)$ - пространство представления - может быть разложено в ортогональную сумму

$$C(k) = C(k_1) \oplus \cdots \oplus C(k_s) \qquad (4.5.3)$$

комплексных эвклидовых пространств таким образом, что каждое пространство $C(k_j)$ инвариантно относительно представляющих операторов, т.е. для всех A из $\mathcal{G}$ оператор $\mathcal{P}(A)$ переводит векторы $C(k_j)$ в векторы того же подпространства. Тогда операторы $\mathcal{P}(A)$, рассматриваемые только на $C(k_j)$, определяют k_j - рядное представление $\mathcal{G}$, которое мы обозначим через $\mathcal{P}_j$. В данной ситуации говорят, что представление $\mathcal{P}$ распадается в ортогональную сумму представлений $\mathcal{P}_j$.

Если выбрать ортонормированный базис в каждом подпространстве $C(k_j)$, то вместе эти базисы составляют базис $C(k)$.

В таком базисе все операторы $\mathcal{P}(A)$ изображаются ящичными матрицами вида (   ) с ящиками из $k_1, k_2, \cdots k_s$ рядов.

f) Произведение представлений

Пусть даны представления $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ одной и той же группы $\mathcal{G}$, соответственно, в пространствах $C(k), C(e)$. Построим тензорное произведение этих пространств:

$$C(k) \otimes C(e) \qquad (4.5.4)$$

(размерности ke см. п.

Каждому оператору A из группы $\mathcal{G}$ соответствуют представляющие операторы $\mathcal{P}(A), \mathcal{Q}(A)$, действующие, соответственно, в пространствах $C(k), C(e)$. Построим тензорное произведение этих операторов:

$$\mathcal{P}(A) \otimes \mathcal{P}(B) \qquad (4.5.5)$$

- оператор, действующий в пространстве $C(k) \otimes C(e)$ (см. п.   ). Из определения тензорного произведения операторов видно, что $\mathcal{P}(AB) \otimes \mathcal{Q}(AB) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) \otimes \mathcal{Q}(A)\mathcal{Q}(B) =$

$$= (\mathcal{P}(A) \otimes \mathcal{Q}(A)) \cdot (\mathcal{P}(B) \otimes \mathcal{Q}(B))$$

так что формула (4.5.5) определяет некоторое представление группы $\mathcal{G}$ в пространстве $C(n) \otimes C(e)$. Это представление называется тензорным (кронеккеровым) произведением представлений $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$. Строение матриц, изображающих операторы (4.5.5), видно из

Аналогично определяется произведение любого числа представлений.

g) Эквивалентность представлений

Пусть даны представления $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ одной и той же группы в одном и том же пространстве $C(n)$. Тогда $\mathcal{P}(A), \mathcal{Q}(A)$ при переменном A из $\mathcal{G}$, составляет два семейства линейных операторов в $C(n)$. Может случиться, что эти семейства переходят друг в друга при некотором унитарном преобразовании пространства $C(n)$, т.е. что

$$\mathcal{Q}(A) = U \mathcal{P}(A) U^{-1} \qquad (4.5.6)$$

при всех A (оператор U один и тот же для всех A). В этом случае представления $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ называются эквивалентными. Смысл ссотношения (4.5.6) можно пояснить следующим образом: если $\mathcal{P}(A)$ переводит вектор x в вектор y, то $\mathcal{Q}(A)$ переводит вектор Ux в вектор Uy; иначе говоря, образы и прообразы всех операторов $\mathcal{P}(A)$ "поворачиваются" с помощью одного и того же "движения" U. Ясно, что различие между представлениями $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$, в некотором смысле, несущественно. Если перейти к матричному изображению представляющих операторов, то все матрицы $\mathcal{P}(A)$ переходят в матрицы $\mathcal{Q}(A)$ при некоторой замене базиса в $C(n)$. Заметим ещё, что представлении одинаковой степени (т.е. в пространствах одной размерности) мы всегда можем заменить представлениями в одном и том же пространстве; в самом деле, все комплексные эвклидовы пространства данной размерности изоморфны и могут быть отождествлены.

h) Неприводимые представления

Пусть $\mathcal{P}$ - представление группы $\mathcal{G}$ в пространстве $C(n)$. Если $C(n)$ не содержит подпространства меньшей размерности, инвариантного относительно группы $\mathcal{P}(\mathcal{G})$, то представление называется неприводимым; в противном случае - приводимым. В ряде важных олучаев изучение всех представлений может быть сведено к изучению неприводимых. Например, для групп $SU(n)$ справедлива следующан теорема:

Каждое представление группы $SU(n)$ разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений; это разложение единственно с точностью до эквивалентности, т.е. два таких разложения, после надлежащего изменения порядка слагаемых, состоят из эквивалентных представлений. Подробнее, это значит, что разложения на неприводимые представления

$$P = P_1 \oplus \ldots \oplus P_n, \quad P = Q_1 \oplus \ldots \oplus Q_m$$

обязательно содержат одинаковое число слагаемых $(m = n)$, и существует такая подстановка $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$, что Q_i и P_{ν_i} эквивалентны $(i = 1, \ldots, n)$.

Аналогичное утверждение о разложении неверно для некоторых других классических групп, например, для полной линейной группы $\mathcal{GL}(n)$.

6. Алгебры Ли. Определения и основные свойства

Мы видели, что некоторые важные системы операторов не являются группами. Для таких систем естественными действиями над операторами являются, вместо умножения, сложение, вычитание и коммутирование (или антикоммутирование). Кроме того, операторы системы обычно можно умножать на все (или некоторые) комплексные числа, не выходя за пределы системы. Эти соображения приводят к следующему определению. Система операторов , называется алгеброй Ли, если она обладает следующими свойствами:

1. Каковы бы ни были операторы A, B из системы A, сумма и разность их $A \pm B$ также принадлежат системе A.
2. Для любых операторов A, B из A оператор $[A,B]$ (или $\frac{1}{i}[A,B]$) также принадлежит A. (4.6.1)

Если система A допускает умножение на любые комплексные (соответственно, любые действительные) числа, она называется комплексной (соответственно, действительной) алгеброй Ли.

Докажем для дальнейших приложений некоторые свойства коммутаторов.

Антикоммутативность умножения Ли вытекает прямо из его определения:

$$[A,B] = -[B,A] \tag{4.6.2}$$

В частности, при $A=B$ имеем

$$[A,A]=0 \tag{4.6.3}$$

Тождество Якоби. Докажем сначала тождество

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B \tag{4.6.4}$$

прямой проверкой:

$$[AB,C]=ABC-CAB=(ABC-ACB)+(ACB-BAC)=$$
$$=A[B,C]+[A,C]B$$

Аналогично доказывается тождество

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0 \tag{4.6.5}$$

Это тождество заменяет свойство ассоциативности, которым не обладает умножение Ли: простые примеры показывают, что, вообще говоря, $[[A,B],C]\neq[A,[B,C]]$

Задание алгебры Ли с помощью образующих и соотношений

Конечная система операторов $\mathcal{L}_1, \ldots \mathcal{L}_s$ из A называется системой образующих (или генераторов) A, если каждый оператор из A может быть представлен как линейнан комбинации образующих операторов:

$$A=\sum_{j=1}^{s} a^j \mathcal{L}_j \tag{4.6.6}$$

В этом n мы будем предполагать, что образующие $\mathcal{L}_j$ линейно независимы; тогда разложение (4.6.5) однозначно, т.е. коэффициенты вполне определяются оператором A. Можно доказать, что каждая алгебра Ли имеет систему образующих, которая может быть выбрана бесконечным множеством способов. Разлагая по $\mathcal{L}_j$ коммутатор образующих $\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_k$, имеем:

$$\frac{1}{i}[\mathcal{L}_i,\mathcal{L}_k]=\sum_{\ell=1}^{s} C_{ik\ell}\mathcal{L}_\ell \tag{4.6.7}$$

Постоянные $C_{ik\ell}$ называются структурными постоянными алгебры Ли; они позволяют вычислить коммутатор любых двух операторов этой алгебры.

В самом деле, выражая A и B в виде (4.6.5), имеем:

$$\frac{1}{i}[A,B]=\sum_{i,k=1}^{s} a_i b_k \frac{1}{i}[\mathcal{X}_i,\mathcal{X}_k]=\sum_{i,k,l=1}^{s} a_i b_k c_{ikl}\mathcal{X}_l \qquad (4.6.8)$$

Таким образом, мы знаем полностью закон коммутирования в алгебре Ли, если указаны структурные константы. Но C_{ikl} не могут быть заданы произвольно; в самом деле, (4.6.3),(4.6.2) и (4.6.5) в применении к операторам $\mathcal{X}_j$ означают, что

$$C_{iil}=0$$

$$C_{ikl}=-C_{kil}$$

$$\sum_{l=1}^{s}\left(C_{ikl}C_{lpq}+C_{kpl}C_{liq}+C_{pil}C_{lkq}\right)=0 \qquad (4.6.9)$$

Можно доказать, что всякая алгебра Ли может быть задана указанием (комплексных или действительных) структурных констант, удовлетворяющих соотношениям (4.6.9); если эти константы известны, можно найти коммутатор любых операторов алгебры по правилу (4.6.8). Мы будем задавать алгебры Ли указанием образующих $\mathcal{X}_j$ и соотношений (4.6.7), которые называются перестановочными соотношениями. Следует заметить, что выбор тех или иных образующих в алгебре Ли диктуется соображениями удобства вычислений (желательно, чтобы структурные константы были возможно проще). Часто оказывается, что удачно выбранные образующие допускают физическое истолкование. Однако, не следует отождествлять алгебру Ли с системой ее образующих и соотношений, так как ее можно задать и с помощью других образующих. Иногда переход к новым образующим позволяет сделать теорию более пригодной для работы, как мы увидели на примерах. Наконец, часто бывает удобно вводить линейно зависимые образующие; это позволяет упростить перестановочные соотношения, но приводит к неоднозначности коэффициентов в (4.6.6).

7. Примеры алгебр Ли

a) $A\mathcal{L}(n,C)$ состоит из всех операторов в $C(n)$; это комплексная алгебра Ли, образующие которой могут быть выбраны следующим образом. Пусть B_k^i есть матрица, у которой элемент на пересечении k-ой строки и i-ого столбца равен единице, а все остальные - нулю. Индексы означают теперь нумерацию матриц, а не матричных элементов; поэтому для записи этих последиих перейдем к следующему обозначению: пусть элемент матрицы B на пересечении μ -ой строки и ν -ого столбца будет $\langle\mu|B|\nu\rangle$. Тогда, применяя два типа индексов Кронеккера, имеем:

$$\langle\mu|B^i_k|\nu\rangle = \delta^i_\nu \delta_{k\mu},$$

$$\langle\mu|B^i_k B^\sigma_\tau - B^\sigma_\tau B^i_k|\nu\rangle = \sum\left(\delta^i_\lambda \delta_{k\mu}\delta^\sigma_\nu \delta_{\tau\lambda} - \delta^\sigma_\lambda \delta_{\tau\mu}\delta^i_\nu \delta_{k\lambda}\right) =$$

$$= \delta^i_\tau \langle\mu|B^\sigma_k|\nu\rangle - \delta^\sigma_k \langle\mu|B^i_\tau|\nu\rangle, \tag{4.7.1}$$

или

$$[B^i_k, B^\sigma_\tau] = \delta^i_\tau B^\sigma_k - \delta^\sigma_k B^i_\tau \tag{4.7.2}$$

Это и есть перестановочные соотношения для образующих B^i_k (деление обеих частей на i дает структурные константы).

в) $ANT(n,c)$ состоит из всех бесследных операторов в $C(n)$; это комплексная алгебра Ли. В качестве образующих возьмем матрицы

$$A^i_k = B^i_k - \frac{1}{n}\delta^i_k\left(B^1_1 + B^2_2 + \dots + B^n_n\right) \tag{4.7.3}$$

Легко проверить, что $Sp\, A^i_k = 0$

Эти матрицы связаны одной линейной зависимостью:

$$A^1_1 + A^2_2 + \dots + A^n_n = 0 \tag{4.7.4}$$

так что $ANT(C,n)$ имеет n^2-1 независимых образующих.

Чтобы разложить n - рядную бесследную матрицу M по этим образующим, выражаем ее сначала через B^i_k :

$$M = \sum_{i,k} \omega^k_i B^i_k = \sum_{i,k} \omega^k_i \left(A^i_k + \frac{1}{n}\delta^i_k \sum_\ell B^\ell_\ell\right)$$

Так как $Sp\, M = 0$, то

$$\sum_{i,k} \omega^k_i \left(Sp\, A^i_k + \frac{1}{n}\delta^i_k n\right) = \sum_\ell \omega^\ell_\ell = 0$$

$$M = \sum_{i,k} \omega^k_i A^i_k \tag{4.7.5}$$

где коэффициенты связаны соотношением

$$\sum_\ell \omega^\ell_\ell = 0 \tag{4.7.6}$$

Легко видеть, что при условии (4.7.6) коэффициенты определяются однозначно.

Так как матрицы B_i^i коммутируют друг с другом, из (4.7.2), (4.7.3) следует, что

$$[A_k^i, A_\ell^s] = \delta_\ell^i B_k^s - \delta_k^s B_\ell^i$$

Подставляя в правую часть вместо B_k^s, B_ℓ^i выражения из (4.7.3)

$$B_k^s = A_k^s + \frac{1}{n}\delta_k^s \sum_i B_i^i, \quad B_\ell^i = A_\ell^i + \frac{1}{n}\delta_\ell^i \sum_j B_j^j$$

имеем

$$[A_k^i, A_\ell^s] = \delta_\ell^i A_k^s - \delta_k^s A_\ell^i = (\delta_\ell^i \delta_\alpha^s \delta_k^\beta - \delta_k^s \delta_\alpha^i \delta_\ell^\beta) A_\beta^\alpha \qquad (4.7.7)$$

c) $AH(n,c)$ состоит из всех эрмитовых операторов в $C(n)$; это действительная алгебра Ли (ср. п. 4, (4.4.I4)). Каждая эрмитова матрица H представляется в виде

$$H = \sum_{i,k} \omega_i^k B_k^i, \quad \omega_k^i = \omega_i^k \qquad (4.7.8)$$

Если записать ω_i^k в виде $\alpha_i^k + \beta_i^k$, где α_i^k и β_i^k действительны, то H представляется как линейная комбинация с <u>действительными</u> коэффициентами эрмитовых образующих B_i^i, $B_k^i + B_i^k$, $iB_k^i - iB_i^k$ $(i \neq k)$ Однако, часто бывает выгодно сохранить не эрмитовы образующие B_k^i, расширяя смысл понятия образующих; тогда для выражения H через образующие приходится пользоваться комплексными коэффициентами ω_i^k, удовлетворяющими соотношения $\omega_k^i = \overline{\omega_i^k}$:

$$H = \sum_{i,k} \omega_i^k B_k^i, \quad \omega_k^i = \overline{\omega_i^k} \qquad (4.7.9)$$

d) $AHS(n,c)$ состоит из всех бесследных эрмитовых операторов в $C(n)$; это действительная алгебра Ли. В качестве ее "внутренних" образующих можно взять A_i^i, $A_k^i + A_i^k$, $iA_k^i - iA_i^k$; по этим образующим бесследные эрмитовы матрицы разлагаются с действительными коэффициентами γ_i^k, удовлетворяющими условию $\sum_i \gamma_i^i = 0$. Но можно воспользоваться и "внешними" образующими A_k^i:

$$H_0 = \sum_{i,k} \omega_i^k A_k^i, \quad \omega_k^i = \omega_i^k, \quad \sum_i \omega_i^i = 0 \qquad (4.7.10)$$

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи, встречающиеся в физике.

e) $n=2$. Паули предложил в качестве образующих для $AH(2,C)$ эрмитовы матрицы

$$\frac{1}{2}\epsilon(2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\quad \sigma_1=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix} \qquad (4.7.11)$$

Всякая эрмитова матрица H разлагается по матрицам (4.7.11) с действительными коэффициентами; если H бесследна, то в разложение не входит $\epsilon(2)$.

Таким образом, $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ представляют образующие для $AHNT(2C)$.

Перестановочные соотношения для матрицы Паули, как легко проверить, имеют вид (ср. (4.6.7)):

$$[\sigma_1,\sigma_2]=i\sigma_3;\quad [\sigma_2,\sigma_3]=i\sigma_1;\quad [\sigma_3,\sigma_1]=i\sigma_2. \qquad (4.7.12)$$

Для $A\mathcal{L}(2,C)$ базис составляют образующие

$$B_1^1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B_1^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad B_2^1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad B_2^2=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \qquad (4.7.13)$$

Эрмитовы матрицы разлагаются по этим образующим по формуле

$$H=\alpha B_1^1+(\lambda+i\mu)B_1^2+(\lambda-i\mu)B_2^1+\beta B_2^2 \qquad (4.7.14)$$

где α,β,λ,μ действительны.

Для бесследных матриц Окубо предложим образующие

$$A_1^1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},\quad A_1^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad A_2^1=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad A_2^2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \qquad (4.7.15)$$

связанные соотношением

$$A_1^1+A_2^2=0 \qquad (4.7.16)$$

Перестановочные соотношения для матриц Окубо получаются из (4.7.7)

$$\begin{aligned}
&[A_1^1,A_1^2]=A_1^2\\
&[A_1^1,A_2^1]=-A_2^1\\
&[A_2^2,A_1^2]=-A_1^2\\
&[A_2^2,A_2^1]=A_2^1\\
&[A_1^2,A_2^1]=A_1^1-A_2^2\\
&[A_1^1,A_2^2]=0
\end{aligned} \qquad (4.7.17)$$

Для бесследных эрмитовых матриц имеем разложение

$$H_0 = \alpha A_1^1 + (\lambda + i\mu) A_1^2 + (\lambda - i\mu) A_2^1 + \beta A_1^2 \qquad (4.7.18)$$

где $\alpha, \beta, \lambda, \mu$ действительны. Связь между матрицами Паули и Окубо дается формулами:

$$A_1^2 = \sigma_1 + i\sigma_2 \quad A_2^1 = \sigma_1 - i\sigma_2 \quad A_1^1 = -A_2^2 = \sigma_3 \qquad (4.7.19)$$

) $f(n) = 3$. По аналогии с матрицами Паули, Геллман построил восемь бесследных эрмитовых матриц λ_i, которые вместе с $\epsilon(3)$ составляют систему независимых образующих для $A\mathcal{L}(3,C)$; без $\epsilon(3)$ они являются образующими для бесследных матриц (с комплексными коэффициентами) и для бесследных эрмитовых матриц (с действительными коэффициентами):

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.7.20)$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(Выбор множителя в λ_8 объясняется тем, что при таком выборе получается простое выражение для следа произведения:

$$Sp(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,8. \qquad (4.7.21)$$

что, впрочем, для нас не существенно, так как мы не будем пользоваться матрицами Геллмана).

Перестановочные соотношения для матриц Геллмана, как нетрудно проверить, имеют вид:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \sum_k f_{ijk} \lambda_k \qquad (4.7.22)$$

где f_{ijk} - действительные коэффициенты, кососимметричные относительно индексов ijk, т.е. не меняющиеся (соответственно, меняющие знак) при четной (соответственно нечетной) перестановке индексов; достаточно поэтому перечислить те f_{ijk}, у которых $i<j<k$ и которые отличны от нуля:

123	1
147	$\frac{1}{2}$
156	$\frac{1}{2}$
246	$\frac{1}{2}$
257	$\frac{1}{2}$
345	$\frac{1}{2}$
367	$-\frac{1}{2}$
458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(4.7.23)

Очевидная громоздкость перестановочных соотношений (4.7.22), (4.7.23) делает применение матриц Гелл-Манна неудобным. Поэтому Окубо выбрал "внешнюю" систему из девяти образующих A^i_k, состоящую не только из эрмитовых матриц:

$$A^1_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad A^2_2=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\quad A^3_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$A^2_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad A^1_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad A^3_1=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad (4.7.24)$$

$$A^1_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}\quad A^3_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\quad A^2_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Все эти матрицы бесследны и удовлетворяют одному линейному соотношению (ср.(4.7.4)):

$$A^1_1+A^2_2+A^3_3=0 \qquad (4.7.25)$$

Диагональные матрицы A^i_i – эрмитовы.

Перестановочные соотношения для трехрядных операторов Окубо представляют частный случай соотношений (4.7.7) (индексы пробегают три значения):

$$[A_1^i,A_i^1]=0;\ [A_1^i,A_1^\sigma]=A_i^\sigma\ (\sigma\neq i),\ [A_1^i,A_\tau^1]=-A_\tau^1\ (\tau\neq i)$$

$$[A_i^i,A_\tau^\sigma]=0\ (\sigma\neq i,\tau\neq i),\ [A_k^i,A_i^k]=A_i^i-A_k^k\ (i\neq k) \qquad (4.7.26)$$

$$[A_k^i\ A_i^\sigma]=A_k^\sigma\ (\sigma\neq k),\ [A_k^i,A_\tau^k]=-A_\tau^i\ (\tau\neq i);[A_k^i,A_\tau^\sigma]=0$$
$$(\sigma\neq k,\tau\neq i)$$

Любая трехрядная матрица разлагается по A_k^i и $\epsilon(3)$ согласно формуле (4.7.9), где надо заменить B_k^i через A_k^i и $B_1^1+B_2^2+B_3^3$ через $\epsilon(3)$ (см. (4.7.3)). Любая трехряднан эрмитова матрица представляется в виде (4.7.9) или через матрицы Окубо и $\epsilon(3)$ в виде

$$\begin{aligned}H=\varepsilon\epsilon(3)+\alpha A_1^1+\beta A_2^2+\gamma A_3^3+\\+(\lambda+i\mu)A_1^2+(\lambda-i\mu)A_2^1+\\+(\sigma+i\tau)A_1^3+(\sigma-i\tau)A_3^1+\\+(\eta+i\zeta)A_2^3+(\eta-i\zeta)A_3^2\end{aligned} \qquad (4.7.27)$$

где $\varepsilon,\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\sigma,\tau,\eta,\zeta$ действительны. Если H - эрмитова бесследная матрица, то в разложении (4.7.27) $\varepsilon=0$ и условие $\alpha+\beta+\gamma=0$, которое всегда предполагается выполненным, позволяет однозначно определить коэффициенты разложения. Связь между матрицами Окубо и матрицами Геллмана дается формулами

$$\begin{aligned}&A_1^2+A_2^1=\lambda_1,\quad A_1^3+A_3^1=\lambda_4,\quad A_2^3+A_3^2=\lambda_6,\\&\frac{A_1^2-A_2^1}{i}=\lambda_2,\quad \frac{A_1^3-A_3^1}{i}=\lambda_5,\quad \frac{A_2^3-A_3^2}{i}=\lambda_7\\&A_1^1-A_2^2=\lambda_3\qquad -\sqrt{3}A_3^3=\lambda_8\end{aligned} \qquad (4.7.28)$$

$n=4$. Дирак предложил 16 четырехрядных эрмитовых матриц в качестве образующих для алгебры всех четырехрядных матриц (с комплексными коэффициентами) или эрмитовых четырехрядных матриц (с действительными коэффициентами). Чтобы получить эти матрицы, вспомним тензорное произведение операторов (см. ( )); обозначая тем же знаком соответствующую операцию над матрицами, изображенную формулой ( ), построим из двухрядных матриц Паули $\sigma_i(2)$ четырехрядные матрицы

$$\sigma_i(4) = \sigma_i(2) \otimes E(2), \quad \rho_i(4) = E(2) \otimes \sigma_i(2) \quad i = 1,2,3 \qquad (4.7.29)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rho_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4.7.30)$$

Тогда 16 матриц $\sigma_i \rho_i$, $\sigma_i \rho_j$ $(i,j = 1,2,3)$, $E(4)$, как можно показать, линейно независимы и составляют базис для всех четырехрядных матриц (с комплексными коэффициентами) и для всех эрмитовых матриц (с действительными коэффициентами). Базис для бесследных матриц получим, отбрасывая $E(4)$.

Чтобы разложить произвольную матриц по указанному базису, обозначим базисные матрицы через $\tau_1, \dots, \tau_{16}$; тогда, как легко проверить,

$$Sp(\tau_i \tau_k) = \delta_{ik} \qquad (4.7.31)$$

Поэтому коэффициенты разложения

$$\tau = \sum_{j=1}^{16} \varepsilon_j \tau_j \qquad (4.7.32)$$

могут быть определены аналогично коэффициентам Фурье:

$$\varepsilon_j = Sp(\tau \tau_j) \qquad (4.7.33)$$

Перестановочные соотношения для σ_i ρ_i имеют вид

$$[\sigma_i, \rho_k] = 0, \quad [\sigma_i, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ik\ell}\, \sigma_\ell, \quad [\rho_i, \rho_k] = 2i\varepsilon_{ik\ell}\, \rho_\ell \qquad (4.7.34)$$

где $\varepsilon_{ik\ell}$ – числа, кососимметричные относительно индексов i, k, ℓ , причем $\varepsilon_{123} = 1$:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1 \qquad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1$$
$$\varepsilon_{iii} = \varepsilon_{ii\ell} = \varepsilon_{ikk} = \varepsilon_{\ell k \ell} = 0 \qquad (4.7.35)$$

Формально (4.7.31) представляют такие же правила коммутации для $\sigma_i(4)$, как (4.7.12) для $\sigma_i(2)$.

Перестановочные соотношения для других матриц Дирака получаются из (4.7.31), например,

$$[\sigma_1\rho_2, \sigma_2\rho_3] = \sigma_1\rho_2\sigma_2\rho_3 - \sigma_2\rho_3\sigma_1\rho_2 = \sigma_1\sigma_2\rho_2\rho_3 - \sigma_2\sigma_1\rho_3\rho_2 =$$
$$= (\sigma_2\sigma_1 + 2i\sigma_3)(\rho_3\rho_2 + 2i\rho_1) - \sigma_2\sigma_1\rho_3\rho_2 = 2i(\sigma_3\rho_3\rho_2 + \sigma_2\sigma_1\rho_1)$$

а затем правая часть может быть разложена по базису с помощью описанного выше "метода Фурье".

Образующие Дирака удобно расположить в таблицу:

$\epsilon(4)$	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	$\rho_1\sigma_1$	$\rho_1\sigma_2$	$\rho_1\sigma_3$
ρ_2	$\rho_2\sigma_1$	$\rho_2\sigma_2$	$\rho_2\sigma_3$
ρ_3	$\rho_3\sigma_1$	$\rho_3\sigma_2$	$\rho_3\sigma_3$

(4.7.36)

В других вопросах удобнее система 16 образующих γ , также введенная Дираком:

$$\gamma_1 = \rho_1\sigma_1, \quad \gamma_2 = \rho_1\sigma_2, \quad \gamma_3 = \rho_1\sigma_3 \quad \gamma_4 = \rho_2, \quad \frac{i}{2}[\gamma_i, \gamma_k] \quad (i,k = 1,2,3,4;\ i \neq k)$$
$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 \qquad \gamma_5\gamma_i\,(i = 1,2,3,4) \quad \epsilon(4) \tag{4.7.37}$$

Для этих матриц просто записывается правило антикоммутирования:

$$\{\gamma_i, \gamma_k\} = \gamma_i\gamma_k + \gamma_k\gamma_i = 2\delta_{ik} \tag{4.7.38}$$

Прием, с помощью которого Дирак получил образующие для четырехрядных матриц из образующих для двухрядных, имеет важное значение в приложениях и в физической литературе называется *marriage* (сочетание). Следующий пример, где применяется тот же прием, важен для дальнейшего.

$n = 6$. Из двухрядных матриц $\sigma_i(2)$ - образующих алгебры $AH(2)$ и трехрядных матриц Геллмана $\lambda_i(3)$ - образующих $AH(3)$ - можно получить образующие $AH(6)$ следующим образом (Гюрси, 1964 г.). Построим сначала матрицы $\lambda_i(6) = \epsilon(2) \otimes \lambda_i(3)$

$$(i = 1,\dots,8) \qquad \sigma_i(6) = \sigma_i(2) \otimes \epsilon(3) \quad (i = 1,2,3).$$

Тогда таблица

$\varepsilon(6)$	$\sigma_1(6)$	$\sigma_2(6)$	$\sigma_3(6)$
$\lambda_1(6)$			
$\vdots$		$\lambda_i(6)\sigma_j(6)$	
$\lambda_8(6)$			

(4.7.39)

содержит 36 образующих алгебры $AH(6)$. Можно показать,что эти образующие независимы; каждая шестирядная эрмитова матрица разлагается по ним однозначно с действительными коэффициентами. Для $A\mathcal{L}(6,C)$ можно взять те же образующие с комплексными коэффициентами; для бесследных матриц - исключается образующая $\varepsilon(6)$. Удобнее, впрочем, задать для $AH(3)$ "внешние" образующие Окубо $A^i_\kappa(3)$; полагая $A^i_\kappa(6)=\varepsilon(2)\otimes A^i_\kappa(3)$, $\sigma_i(6)=\sigma_i(2)\otimes\varepsilon(3)$ получаем таблицу образующих для $A\mathcal{L}(6)$:

$\varepsilon(6)$	$\sigma_1(6)$	$\sigma_2(6)$	$\sigma_3(6)$
$\vdots$			
$A^i_d(6)$		$A^i_d(6)\sigma_\kappa(6)$	

(4.7.40)

Шестирядные эрмитовы матрицы разлагаются по этим образующим с комплексными коэффициентами, подчиненными некоторым соотношениям. Шестирядные алгебры Ли будут дальше изучены подробнее.

8. Связь между группами Ли и алгебрами Ли

Переход от групп Ли к алгебрам Ли представляет собой некоторое обобщение логарифмирования чисел, превращающего умножение в сложение. Приведем сначала построение "показательной функции" от матрицы и от оператора. Если B^i_j $-n$ -рядная комплексная матрица, то определены ее степени B^2, B^3 ; обозначим через $(B^k)^i_j$ элементы матрицы B^k. Тогда для любых i,j , как можно показать, ряд

$$1+B^i_j+\frac{1}{2!}(B^2)^i_j+\frac{1}{3!}(B^3)^i_j+\cdots \qquad (4.8.1)$$

сходится; обозначим его сумму $\mathcal{E}^i_j$. Матрица $\mathcal{E}^i_j$ называется экспоненциалом матрицы $\mathcal{B}'_1$. $\mathcal{E} = e^{\mathcal{B}}$ Разложение (4.8.I) можно записать в матричном виде (подразумевая, что суммирование производится отдельно для каждого матричного элемента (i,j) :

$$\mathcal{E} = e^{\mathcal{B}} = 1 + \mathcal{B} + \frac{1}{2!}\mathcal{B}^2 + \frac{1}{3!}\mathcal{B}^3 + \dots + \frac{1}{k!}\mathcal{B}^k + \dots \qquad (4.8.2)$$

Пусть теперь $\mathcal{B}$ – оператор, действующий в $C(n)$. Тогда в базисах e и e' имеем матрицы $\mathcal{B}_e$, $\mathcal{B}_{e'}$, изображающие оператор $\mathcal{B}$; построим

$$\mathcal{E}_e = 1 + \mathcal{B}_e + \frac{1}{2!}\mathcal{B}_e^2 + \dots, \quad \mathcal{E}_{e'} = 1 + \mathcal{B}_{e'} + \frac{1}{2!}\mathcal{B}_{e'}^2 + .$$

Как мы знаем , матрицы $\mathcal{B}_e, \mathcal{B}_{e'}$ подобны:

$$\mathcal{B}_{e'} = S^{-1}\mathcal{B}_e S$$

где – некоторая обратимая матрица. Легко проверить, что

$$(\mathcal{B}_{e'})^k = S^{-1}\mathcal{B}_e S \cdot S^{-1}\mathcal{B}_e S \dots S^{-1}\mathcal{B}_e S = S^{-1}\mathcal{B}_e^k S$$

откуда

$$\mathcal{E}_{e'} = S^{-1}\mathcal{E}_e S$$

Итак, матрица $\mathcal{E}_{e'}$ изображает в базисе e' тот же оператор, который матрица $\mathcal{E}_e$ изображает в базисе e . Тем самым определен некоторый оператор $\mathcal{E}$, однозначно соответствующий оператору $\mathcal{B}$; обозначим его через $e^{\mathcal{B}}$. Тогда (4.8.2) можно рассматривать как символическое определение оператора $\mathcal{E}^{\mathcal{B}}$. Нетрудно доказать следующие свойства экспоненциального отображения:

I) $\det(e^{\mathcal{B}}) = e^{Sp\,\mathcal{B}}$ (4.8.3)

2) Каков бы ни был $\mathcal{B}$, $e^{\mathcal{B}}$ всегда – обратимый оператор; (4.8.4)

3) Если $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, то $e^{\mathcal{A}+\mathcal{B}} = e^{\mathcal{A}} \cdot e^{\mathcal{B}}$ (4.8.5)

4) $e^{\mathcal{B}^+} = (e^{\mathcal{B}})^+$ (4.8.6)

Оказывается, что все операторы, близкие к $\mathcal{E}(n)$, имеют "логарифмы", которые являются малыми операторами. Точный смысл этого утверждения состоит в следующем (термин "окрестность" может быть строго определен, но мы на этом не останавливаемся). <u>Существует такая окрестность $\mathcal{U}$ единичного оператора $\mathcal{E}(n)$ и такая окрестность V нулевого оператора, что (4.8.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между операторами $\mathcal{B}$ из V и $\mathcal{E}$ из $\mathcal{U}$.</u>

Предполагая, что $\mathcal{E}$ лежит в указанной окрестности $\mathcal{U}$, можно сопоставить $\mathcal{E}$ один и только один оператор $\mathcal{B}$ из V

такой, что $e^{B}=\mathcal{E}$. Этот оператор можно назвать <u>логарифмом</u> $\mathcal{E}$:

$$B=\ln\mathcal{E} \tag{4.8.7}$$

(Заметим, что операторам, "далеким" от $\mathcal{E}(n)$, нельзя поставить в соответствие единственный логарифм; например, операторы $z\cdot\mathcal{E}(n)$, где z - комплексное число, имеют "логарифмами" все операторы вида $(\ln|z|+i(\arg z+2\pi k i))\mathcal{E}(n)$, $k=0,1,2,\ldots$ = 0,I,2,... ; однозначный выбор аргумента z возможен лишь для z, близких к единице).

Для каждого обратимого оператора $\mathcal{E}$ существует такой оператор B (неоднозначно определенный), что $e^{B}=\mathcal{E}$; доказательство мы опускаем. Покажем, что <u>если B - антиэрмитов оператор, то e^{B} - унитарный оператор; если B - бесследный оператор, то e^{B} - унимодулярный оператор</u>.

В самом деле, $BB^{+}=(-B^{+})(-B)=B^{+}B$ и, согласно (4.8.5),

$$e^{B+B^{+}}=e^{B}\cdot e^{B^{+}}$$

Так как $B^{+}=-B$, из (4.8.6) следует

$$e^{B}(e^{B})^{+}=\mathcal{E}(n)$$

Значит, $(e^{B})^{+}=(e^{B})^{-1}$, и e^{B} - унитарный оператор.

Можно показать, что <u>каждый</u> унитарный оператор имеет вид

$$U=e^{B} \tag{4.8.8}$$

где B - антиэрмитов оператор; полагая $B=iH$, где H -эрмитов оператор (см. п. (4.4), (c)), имеем

$$U=e^{iH} \tag{4.8.9}$$

Это равенство аналогично представлению комплексного числа z с модулем I в виде $e^{i\alpha}$, где α - действительное число. Если, далее, $\mathrm{Sp}\,B=0$, то из (4.8.3) вытекает, что $\det e^{B}=1$

В общем случае

$$B=B_0+B_1,\ \text{где}\ \mathrm{Sp}\,B_0=0,\ \mathrm{Sp}\,B_1=\mathrm{Sp}\,B$$

$$B_1=\mathrm{Sp}\,B\cdot\mathcal{E}(n)$$

Отсюда $e^{B}=e^{B_0}\cdot e^{B_1}$

$$e^{B}=e^{\mathrm{Sp}\,B}\cdot e^{B_0}$$

где e^{B_0} - унимодулярный оператор.

Если e^{B} - унитарный оператор, получаем его каноническое представление через унимодулярный:

$$U = \det U \cdot U_0 \qquad (4.8.9)$$

Посмотрим теперь, насколько экспоненциальное отображение операторов похоже на показательную функцию от числа (4.8.5) означает, что если слагаемые A, B коммутируют, то показательное отображение переводит сумму в произведение, что соответствует основному свойству показательной функции. Это свойство неверно для произвольных операторов A, B. Если A и B малы и необязательно коммутируют, то с точностью первого порядка

$$e^{A} = 1 + A, \quad e^{B} = 1 + B \quad e^{A+B} = 1 + A + B = e^{A} \cdot e^{B} = e^{B} e^{A} \qquad (4.8.10)$$

С точностью второго порядка $e^{A} = 1 + A + \frac{A^2}{2}$, $e^{B} = 1 + B + \frac{B^2}{2}$,

$$e^{A+B} = 1 + A + B + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2),$$
$$e^{A} e^{B} = 1 + A + B + AB + \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \quad e^{B} e^{A} = 1 + B + A + BA + \frac{B^2}{2} + \frac{A^2}{2} \qquad (4.8.11)$$
$$[e^{A}, e^{B}] = e^{A} e^{B} - e^{B} e^{A} = AB - BA = [A, B]$$
$$e^{A+B} - e^{A} e^{B} = BA \quad e^{A+B} - e^{B} e^{A} = AB$$

Теперь мы переходим к изложению связи между группами Ли и алгебрами Ли. При этом мы ограничимся лишь теми группами и алгебрами, которые представляют интерес для дальнейшего изложения. Для этих наиболее важных случаев связь между группами и алгебрами устанавливается с помощью экспоненциального отображения: когда B пробегает алгебру Ли, e^{B} пробегает соответствующую ей группу Ли. Следующая таблица содержит примеры такого соответствия.

Группа Ли	Размерность	Свойства операторов и матриц алгебры Ли	Алгебра Ли	Свойства операторов и матриц алгебры Ли
$GL(n,C)$ Полная линейная	$2n^2$	Обратимые $\det \neq 0$	$AL(n,C)$	Все
$GL(n,R)$ Действ. линейная	n^2	Действ., $\det \neq 0$	$AL(n,R)$	Все действительные
$SL(n,C)$ Спец. линейная или унимодулярная	$2n^2-2$	Унимодулярные $\det = 1$	$AS(n,C)$	Бесследные $S_p = 0$
$SL(n,R)$ спец. действ. линейн.	n^2-1	Действ., $\det = 1$	$AS(n,R)$	Действ. $S_p = 0$
$U(n)$ унитарная	n^2	Унитарные $\sum U_i^j \bar{U}_k^j = \delta_{ik}$	$A\bar{H}(n)$	Антиэрмитовы $B_i^j + \bar{B}_j^i = 0$
$SO(n)$ Ортогональная	$\frac{n(n-1)}{2}$	Ортогональные Действ., $\sum U_i^j U_k^j = \delta_{ik}$ $\det = 1$	$ASM(n,R)$	Кососимметр. действ. $B_i^j + B_j^i = 0$
$SU(n)$ Унитарная унимодулярная	n^2-1	Унитарные, унимодулярные $\sum_j U_i^j \bar{U}_k^j = \delta_{ik}$ $\det = 1$	$A\bar{H}S(n)$	Антиэрмитовы бесследные $B_i^j + \bar{B}_j^i = 0$ $S_p = 0$

Заметим, что размерность группы Ли, как можно показать, совпадает с числом линейно независимых образующих соответствующей алгебры Ли. Группа   , состоящая из двух связных компонент, не может быть <u>в целом</u> связана со своей алгеброй Ли экспоненциальным отображением, и потому не включена в таблицу. Напомним еще раз, что указанная нами связь между группами и алгебрами Ли в общем случае носит <u>локальный</u> характер (т.е. относится к окрестностям единичного и нулевого элементов, см. выше).

Переход от алгебры Ли антиэрмитовых операторов к алгебре эрмитовых операторов осуществляется умножением на . При этом вместо коммутирования получается видоизмененное коммутирование

9. Представления алгебр Ли. Пусть - комплексная алгебра Ли с коммутированием (случай рассматривается аналогично). Говорят, что дано - рядное представление алгебры (или гомоморфизм в алгебру), если каждому оператору из поставлен в соответствие некоторый оператор , действующий в , причем сумме, кратному и коммутатору операторов из соответствует сумма, кратное и коммутатор операторов в :

$$
\begin{aligned}
P(A+B) &= P(A)+P(B) \\
P(\lambda A) &= \lambda P(A) \qquad (4.9.1) \\
P([A,B]) &= [PA,PB]
\end{aligned}
$$

Если A - действительная алгебра Ли, то λ в (4.9.1) может быть произвольным действительным числом.

Определение представления алгебры Ли следует сравнить с определением представления группы Ли в п. 5.

Все операторы вида $P(A)$, где A пробегает алгебру A, составляют также некоторую алгебру Ли - подалгебру

Как мы увидим, в теории элементарных частиц, по существу, работают с представлениями алгебр Ли. Но отдельное изучение таких представлений нам не понадобится, ввиду связи их с представлениями групп Ли, которая сейчас будет изложена. Мы укажем закон, по которому представление группы Ли порождает представление соответствующей ей алгебры Ли. Можно показать, что все представления алгебр Ли могут быть получены таким способом. Итак, пусть задано представление P группы Ли $\mathcal{Y}$ k-рядными операторами; представляющую группу обозначим, как в п.5, через $P(\mathcal{Y})$. Алгебру Ли, соответствующую группе $\mathcal{Y}$, обозначим через A. Пусть A - оператор из A; тогда e^A принадлежит $\mathcal{Y}$.

Рассмотрим однопараметрическую подгруппу $\mathcal{Y}$, состоящую из операторов e^{tA}, где t - действительное число. Так как

$$P(e^{t_1 A})\cdot P(e^{t_2 A}) = P(e^{t_1 A}\cdot e^{t_2 A}) = P(e^{(t_1+t_2)A})$$

операторы $P(e^{tA})$ тоже образуют однопараметрическую подгруппу (группы $P(\mathcal{Y})$). Можно показать, что в алгебре Ли группы $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ существует один и только один оператор $\mathcal{B}$, порождающий эту подгруппу, т.е. удовлетворяющий тождеству

$$\boxed{P(e^{tA}) = e^{t\mathcal{B}}} \tag{4.9.2}$$

Положим

$$\mathcal{B} = P(\mathcal{A}) \tag{4.9.3}$$

$\tilde{P}$ и есть представление алгебры Ли, порожденное заданным представлением P группы Ли. Можно показать, что удовлетворяет определению представления (4.9.I).

Ввиду только что указанной связи между представлениями групп и алгебр Ли, мы будем вместо $\tilde{P}$ писать просто $\mathcal{P}$. На практике удобно находить оператор $\mathcal{B}$ следующим образом: задают A , находят $P(e^{tA})$, пользуясь тем, что представление группы Ли известно, а затем разлагают $P(e^{tA})$ в ряд по степеням t ; тогда коэффициент при первой степени t будет искомый оператор $\mathcal{B}$ (ср. вычислении в п.).

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

I. Представления $SU(2)$. Напомним, что группа $SU(2)$ состоит из унитарных унимодулярных операторов в двумерном комплексном эвклидовом пространстве $C(2)$, или - в матричной форме - из матриц вида

$$\begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 \\ u_1^2 & u_2^2 \end{pmatrix}, \tag{5.I.I}$$

где

$$|u_1^1|^2 + |u_2^1|^2 = 1, \quad |u_1^2|^2 + |u_2^2|^2 = 1, \tag{5.I.2}$$

$$u_1^1 \bar{u}_1^2 + u_2^1 \bar{u}_2^2 = 0, \quad u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1 = 1 \tag{5.I.3}$$

Для двухрядных матриц можно получить более простую форму; для этого положим $u_1^1 = \alpha$, $u_2^1 = \beta$. Тогда третье условие (5.I.2) дает $u_1^2 = -\kappa \bar{u}_2^1$, $u_2^2 = \kappa \bar{u}_1^1$, где κ - некоторое число; согласно первым двум условиям (5.I.2), должно быть

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |\kappa\alpha|^2 + |\kappa\beta|^2 = 1,$$

откуда $|\kappa| = 1$, $\kappa = e^{i\varphi}$, где φ действительно. Поэтому $u_1^2 = e^{i\varphi}\bar{\beta}$, $u_2^2 = e^{i\varphi}\bar{\alpha}$ Далее, $u_1^1 u_2^2 - u_1^2 u_2^1 = e^{i\varphi}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta})$, и из (5.I.3) следует, что $e^{i\varphi} = 1$

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \qquad (5.I.4)$$

Итак, матрицы группы $SU(2)$ имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (5.I.5)$$

где α, β - произвольные комплексные числа, удовлетворяющие соотношению (5.I.4). Мы убеждаемся снова, что группа $SU(2)$ трехмерна (ср. п.

Векторы пространства $C(2)$ называются <u>спинорами</u>, а тензоры над пространством $C(2)$ - <u>спинтензорами</u>. Действие оператора из группы $SU(2)$ на спинор описывается в координатах уравнениями

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \alpha x^1 + \beta x^2 \\ x^{2'} &= -\bar{\beta} x^1 + \bar{\alpha} x^2 \end{aligned} \qquad (5.I.6)$$

<u>Построение представлений</u>

Рассмотрим пространство $C(P,0)$ всех контравариантных тензоров ранга p . Как мы знаем (см. п.), каждому оператору $\mathcal{L}$, действующему в $C(2)$, соответствует оператор $\overset{p}{\mathcal{L}} = \Pi \mathcal{L}$, действующий в пространстве $C(P,0)$; в частности, если U - оператор из группы $SU(2)$, то $\overset{p}{U} = \mathcal{P}U$ - унитарный оператор, и мы получаем унитарное представление группы $SU(2)$. Легко показать, что представляющие операторы не только унитарны, но и унимодулярны. В самом деле, их матрицы суть -ые кронеккеровы степени унимодулярных унитарных матриц; при надлежащем выборе базиса унитарная унимодулярная матрица имеет диагональный вид, и из формулы ( ) легко усмотреть, что определитель любой ее кронеккеровой степени равен единице. Итак, $\Pi(SU(2))$ есть подгруппа группы $SU(\tau)$ где τ - размерность пространства $C(P,0)$. (Заметим, что это расоуждение непосредственно распространяется на представлении любой группы $SU(n)$). Представление Π , как легко видеть, приводимо; в самом деле, мы сейчас укажем подпространство $C(P,0)$, инвариантное относительно группы $\Pi(SU(2))$

Симметрические тензоры

Каждый тензор $T(P,O)$ имеет вид

$$\sum_j x_j^1 \otimes x_j^2 \otimes \ldots \otimes x_j^P \qquad (5.I.7)$$

где x_j^i - векторы пространства $C(2)$

Каждой подстановке P чисел

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & P \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_P \end{pmatrix}, \quad f^{-1}(i) = \kappa_i, \qquad (5.I.8)$$

соответствует операция над тензорами, сопоставляющая $T(P,O)$ тензор

$$fT(P,O) = \sum_j x_j^{\kappa_1} \otimes x_j^{\kappa_2} \otimes \ldots \otimes x_j^{\kappa_P} \qquad (5.I.9)$$

Легко проверить, что операция f не зависит от способа записи тензора в виде (5.I.7) (ср. п.

Если для любой подстановки f $fT(P,O) = T(P,O)$, тензор $T(P,O)$ называется симметрическим. Другое определение симметрических тензоров состоит в следующем. Ясно, что кронеккерова P -ая степень любого вектора из $C(2)$

$$x \otimes x \otimes \ldots \otimes x \qquad (P \text{ множителей}) \qquad (5.I.10)$$

есть симметрический тензор; можно доказать, что любой симметрический тензор есть линейная комбинация степеней вида (5.I.10).

Посмотрим, как связаны координаты тензоров T и fT. Для этого удобно разложить T по базису и применить определение операции f к полученной записи. Чтобы формулировать результат, удобно ввести следующее обозначение.
Пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_P$ - последовательность индексов; обозначим последовательность индексов $\alpha_{g(1)},\ldots,\alpha_{g(P)}$ через $g(\alpha_1,\ldots,\alpha_P)$. Таким образом, индексы меняются местами, но состав индексов в последовательности остается прежним; например, если

$P=3$, $f\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, то $(fT)^{112} = T^{121}$ (но не T^{223}!).

В этих обозначениях можно выразить координаты тензора fT через координаты тензора T формулой

$$(fT)^{\alpha_1,\ldots,\alpha_P} = T^{f(\alpha_1,\ldots,\alpha_P)} \qquad (5.I.11)$$

(теперь ясно, почему мы воспользовались в определении (5.I.9) подстановкой s^{-1} вместо s : иначе нам пришлось бы производить обратную подстановку над индексами в (5.I.II), что затруднило бы работу с тензорами в координатной форме).

Симметрические тензоры характеризуются в координатах условием:

$$T^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = T^{s(\alpha_1,\dots,\alpha_p)} \tag{5.I.12}$$

для любой подстановки s . Таким образом, значение координаты $T^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}$ симметрического тензора зависит не от порядка индексов $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, а только от их состава; в случае тензоров над $C(2)$, когда индексы могут принимать лишь значения I, 2, состав индексов определяется указанием числа единиц p_1 и числа двоек p_2 в наборе $\alpha_1,\dots,\alpha_p$. p_1 и p_2 называются числами заполнения симметрического тензора $T^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}$. Задание тензора "в числах заполнения" производится следующим образом: для каждого разложения $p = p_1 + p_2$ $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$, надо указать общее значение координат с p_1 индексами, равными единице, и p_2 индексами, равными двойке. Это значение обозначается через T^{p_1,p_2} (запятая существенна и указывает на задание тензора в числах заполнения).

Например, симметрический тензор $T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}$ задается числами $T^{3,0}$, $T^{2,1}$, $T^{1,2}$, $T^{0,3}$

Задание тензоров в числах заполнения позволяет определить размерность подпространства $sym(p,0)$ всех симметрических тензоров валентности $(p,0)$ над $C(2)$. В самом деле, число координат, необходимых для задания симметрического тензора, равно числу его чисел заполнения или, что то же, числу представлений в виде суммы неотрицательных слагаемых $p_1 + p_2$. Итак, размерность $sym(p,0)$ равна $p+1$

Неприводимые представления

Покажем, что $sym(p,0)$ инвариантно относительно всех операторов $\overline{U}$, где U принадлежит $SU(2)$.

В самом деле, согласно действия $\overline{U}$ в $C(p,0)$ описывается формулой

$$T'^{\alpha_1,\dots,\alpha_p} = U^{\alpha_1}_{\beta_1} U^{\alpha_2}_{\beta_2} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p} T^{\beta_1\dots\beta_p} \tag{5.I.12}$$

Применяя $\overline{U}$ к тензору sT и обозначая через s_α, s_β^{-1} и т.д. подстановки над индексами α,β имеем (см. 5.I.II):

$$(ST)'^{\alpha_1 \dots \alpha_p} = U^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p} (ST)^{\beta_1 \dots \beta_p} =$$

$$= U^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p} T^{S(\beta_1 \dots \beta_p)} = S^{-1}_{\beta} (U^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p}) T^{\beta_1 \dots \beta_p} =$$

$$= S_{\alpha} (S^{-1}_{\alpha} S^{-1}_{\beta})(U^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p}) T^{\beta_1 \dots \beta_p} =$$

$$= S_{\alpha} U^{\alpha_1}_{\beta_1} \dots U^{\alpha_p}_{\beta_p} T^{\beta_1 \dots \beta_p} = T'^{S(\alpha_1 \dots \alpha_p)} = (ST')^{\alpha_1 \dots \alpha_p}$$

т.е. $(ST)' = ST'$

(5.I.I3)

или, что то же, $\overline{U} S T = S \overline{U} T$

(5.I.I4)

Если, в частности, T - симметрический тензор, $ST = T$, то

$$S \overline{U} T = \overline{U} T, \qquad (5.I.I5)$$

и тензор $\overline{U} T$ также симметрический. Итак, пространство $sym(p,0)$ инвариантно относительно группы $\Pi S_1 U(2,0)$ и представление Π приводимо. Построим теперь представление Π_{sym} группы $SU(2)$ - ограничение представления Π на подпространстве $sym(p,0)$. Для этого обозначим через $\overline{U}_{sym}$ оператор $\overline{U}$, рассматриваемый как преобразование пространства $sym(p,0)$, т.е. применяемый только к симметрическим тензорам. Так как размерность $sym(p,0)$ равна $p+1$, соответствие $U \to \overline{U}_{sym}$ задает некоторое $p+1$ - рядное представление группы $SU(2)$, которое мы обозначим через

$$\Pi^{(p+1)}_{sym} \; (p = 1, 2, \dots) .$$

Одномерное представление, совпадающее для группы $SU(2)$ с тривиальным (п. 4,5), мы также формально включим в изложенную схему, обозначив его через $\Pi^{(1)}_{sym}$; будем считать, что это представление соответствует типу тензоров T "без индексов", или "нулевой валентности", имеющих одну и ту же (единственную) координату в любом базисе (такой тензор можно отождествить с комплексным числом).

Можно доказать, что при всех p представления $\Pi^{(p+1)}_{sym}$ неприводимы, т.е. $sym(p,0)$ не содержит уже никакого подпространства меньшей размерности, инвариантного относительно всех операторов $\Pi_{\text{тун}}$. Таким образом, $SU(2)$ имеет неприводимые представления любой степени. Далее, можно доказать, что всякое неприводимое представление группы $SU(2)$ эквивалентно (ср. п.   ) одному из представлений $\Pi^{(p+1)}_{\text{тун}}$, иначе говоря, с точностью до эквивалентности только что изложенный "тензорный" подход позволяет найти все неприводимые представления. Как мы знаем (п. 4.5   ), любое представление группы $SU(n)$ разлагается на неприводимые, так что представления $SU(2)$ построены полностью.

Комментарии. Доказательство фактов, на которые мы здесь ссылаемся (неприводимости представлений и полноты найденной системы представлений) опирается на сложные математические методы и не может быть здесь приведено. В дальнейшем, в аналогичных случаях, мы также ограничимся описанием приемов, позволяющих получить полную систему неприводимых представлений, но не будем доказывать, что полученные представления неприводимы и что других неприводимых представлений не существует.

Для построения представлений мы воспользовались симметрическими тензорами; "тип симметрии", который они представляют - простейший возможный (мы не даем пока определения "типа симметрии" в общем случае). Этот тип симметрии тензоров ранга символически изображается схемой Юнга - строкой из p квадратов:

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\;\cdots\cdots\;\boxed{}\boxed{} \qquad (5.I.16)$$

Этой строке соответствует P индексов $\alpha_1,\dots,\alpha_p$, которые можно расставить в ее квадратах. Полезность такого изображения в этом простейшем случае не видна, и мы приводим его лишь для полноты (представления всех групп $SU(n)$, как мы увидим, задаются схемами Юнга). Тип симметрии T (валентности нуль) изображается "пустой" схемой Юнга (без клеток).

2. Представления $SU(3)$. Группа $SU(3)$ состоит из унитарных унимодулярных операторов в трехмерном комплексном эвклидовом пространстве $C(3)$. Размерность этой группы равна 3^2 - I, т.е. восьми (см. п. 4,4 ( )). Операторы из $SU(3)$ действуют на векторы пространства $C(3)$; поскольку $SU(3)$ играет особо важную роль в теории элементарных частиц, мы дадим этим векторам, по аналогии со спинорами, особое название - триноры. Тензоры над пространством $C(3)$ мы будем называть тринтензорами.

Рассмотрим пространство $C(P,0)$ всех контравариантных тринтензоров ранга p . Если U принадлежит $SU(3)$, то соответствующий оператор $\tilde{U}$ действует в пространстве $C(p,0)$; он унитарен, как доказано в п.   , и унимодулярен (доказательство проводится так же, как в п. (5.I)). Тем самым определяется некоторое представление Π группы $SU(3)$; как мы увидим, это представление всегда приводимо.

В самом деле, точно так же, как в п. (5.I), доказывается, что подпространство симметрических тензоров $Sym(p,0)$ инвариантно относительно группы $\Pi SU(3)$. Но, в отличие от п. (5.I), полученное таким образом представление $\Pi^{(p+1)}_{Sym}$ вообще говоря, приводимо. Чтобы получить неприводимые представления $SU(3)$, надо подробнее исследовать свойства симметрии тринтензоров.

Типы симметрии тринтензоров

Построим сначала схемы Юнга для группы $SU(3)$. Эти схемы имеют вид таблиц из двух строк, составленных из квадратов:

(5.2.I)

Схему, в которой $p+q$ квадратов в первой строке и q - во второй, обозначим через (p,q) .

Рассмотрим пространство $C(p+2q,0)$ контравариантных тензоров ранга $p+2q$. Будем говорить, что тензор T симметричен относительно некоторой группы индексов, если для каждой подстановки индексов f , оставляющей неподвижными все не входящие в группу индексы, справедливо равенство $fT=T$.
Например, тензор $T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$ симметричен относительно первых трех индексов, если

$$T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_2\alpha_3\alpha_1\alpha_4\alpha_5} =$$

$$= T^{\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_3\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5} = T^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_5}$$

Если (как часто случается) индексы, относительно которых тензор симметричен, расположены рядом, мы будем выделять их витыми скобками:

$$T^{\{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\}\alpha_4\alpha_5}$$

Далее, будем говорить, что тензор T кососимметричен относительно пары индексов $\alpha_i\ \alpha_j$, если подстановка (транспозиция) f_{ij}, меняющая местами $\alpha_i\ \alpha_j$ и не меняющая остальных индексов, изменяет знак тензора: $f_{ij}T=-T$. Например, тензор $T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$ кососимметричен относительно $\alpha_4\alpha_5$, если

$$T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_5\alpha_4}=-T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5}$$

Если индексы α_i,α_j расположены рядом, кососимметричность по этим индексам обозначается квадратными скобками:

$$T^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3[\alpha_4\alpha_5]}$$

Поставим теперь в соответствие каждой схеме Юнга (p,q) подпространство $C_{p,q}$ пространства $C(p+2q,0)$, состоящее из всех тензоров

$$T^{\{\alpha_1\ldots\alpha_p\}[\gamma_1\delta_1][\gamma_2\delta_2]\ldots[\gamma_p\delta_p]} \tag{5.2.3}$$

1. T симметричен относительно индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$;

2. T кососимметричен относительно каждой пары индексов $[\gamma_i\delta_i]$;

3. T симметричен относительно пар $[\gamma_i\delta_i]$ (т.е. для любой подстановки f, переводящей каждую из этих пар в другую или в ту же пару, $fT=T$).

Формула (5.I.I3) показывает, что $C_{p,q}$ инвариантно относительно группы $\Pi SU(3)$ (Π - представление $SU(3)$ операторами, действующими в $C(p+2q,0)$). Однако, полученное таким образом представление $SU(3)$ в $C_{p,q}$ оказывается, вообще говоря, приводимым, и нужно дальнейшее сужение пространства.

Неприводимые представления

Заметим, что всякое подпространство может быть описано линейными уравнениями, связывающими координаты; мы определим сейчас коэффициенты нужных нам линейных соотношений.

Построим систему чисел

$$\epsilon_{\rho\lambda\tau}=\epsilon^{\rho\lambda\tau}=\begin{cases}0, & \text{если индексы } \rho\lambda\tau \text{ не все различны;}\\ 1, & \text{если подстановка } \begin{pmatrix}1&2&3\\ \rho&\lambda&\tau\end{pmatrix} \text{ четна;}\\ -1, & \text{если эта подстановка нечетна.}\end{cases} \tag{5.2.4}$$

По виду запись $\varepsilon_{\rho\sigma\tau}$ напоминает тензор; однако, если истолковать числа $\varepsilon_{\rho\sigma\tau}$, как координаты некоторого тензора в базисе e, то при переходе к базису e' с помощью оператора U (см.   ) получим координаты того же тензора в базисе e'

$$\varepsilon'_{\rho\sigma\tau} = U^{\lambda}_{\rho} U^{\mu}_{\sigma} U^{\nu}_{\tau} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} = \det U \cdot \varepsilon_{\rho\sigma\tau} \tag{5.2.5}$$

Таким образом, если сопоставить каждой системе координат числа $\varepsilon_{\rho\sigma\tau}$, то мы не получим координат тензора, множитель $\det U$ лишь по модулю равен единице. (Иногда говорят, что числа $\varepsilon_{\rho\sigma\tau}$ $(\varepsilon^{\rho\sigma\tau})$ суть координаты "псевдотензора", но мы не будем вводить этого понятия). Из (5.2.5) вытекает, что уравнения вида

$$\varepsilon_{\rho\sigma\tau} T^{\dots\rho\,\cdot\,\sigma\dots\tau\cdot} = 0 \tag{5.2.6}$$

связывающие координаты тензора, имеют инвариантный характер: такие уравнения, записанные в любых двух системах координат, равносильны. Каждому выбору индексов ρ, σ, τ (точнее, мест этих индексов) соответствует уравнение вида (5.2.6).

Покажем, что подпространство $C^{\bullet}_{p,q}$ всех тензоров из удовлетворяющих уравнениям (5.2.6) инвариантно относительно всех операторов $\widetilde{U}$. В самом деле, обозначим через f_j всевозможные подстановки, меняющие местами индексы ρ, σ, τ и не меняющие остальных индексов; пусть $\operatorname{sgn} f$ равен I, если подстановка f_j четна, и - I в противном случае. Тогда уравнение (5.2.6) можно переписать в виде:

$$\sum \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{1\dots2\dots3} = 0$$

(см. (5.I.II)).

Если подстановка $f_\circ$ переводит I,2,3, соответственно, в ρ, σ, τ и не меняет индексов на остальных местах, то

$$\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{\rho\ \sigma\ \tau} = \sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{f_\circ(\dots1\dots2\dots3\dots)} =$$

$$= \sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_\circ f_j T)^{\dots1\dots2\dots3} = \operatorname{sgn} f_\circ \sum_j \operatorname{sgn}(f_\circ f_j)(f_\circ f_j T)^{\dots1\dots2\dots3\dots} =$$

$$= \operatorname{sgn} f_\circ \sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{\dots1\dots2\dots3\dots} = 0$$

Пусть, далее, хотя бы два из индексов ρ, σ, τ, например, ρ и σ, принимают равные значения; обозначим через f' подстановку, меняющую местами ρ, σ и не меняющую остальных индексов. Ясно, что подстановка f' нечетна. Пусть f'_k суть все четные подстановки (из числа введенных выше f_j); тогда все нечетные имеют вид $f'_k f'$, причем

$$(f'_k f' T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau \dots} = (f'_k T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau}$$

Поэтому, принимая во внимание нечетность f' , получаем:

$$\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau \dots} =$$

$$= \sum_k [\operatorname{sgn} f'_k (f'_k T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau \dots} + \operatorname{sgn}(f'_k f')(f'_k f' T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau}]$$

$$= \sum_k (\operatorname{sgn} f'_k + \operatorname{sgn} f'_k \cdot \operatorname{sgn} f')(f'_k T)^{\dots p \dots \lambda \dots \tau \dots} = 0$$

Итак, для любых значений индексов p, λ, τ (и любых значений других индексов, обозначенных многоточиями)

$$\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T)^{\dots p \dots \lambda . \tau ..} = 0$$

т.е.

$$\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T) = 0 \qquad . \tag{5.2.7}$$

Соотношение (5.2.7) равносильно уравнению (5.2.6) и из него сразу следует инвариантность подпространства $\overset{\circ}{C}_{p,q}$. Действительно, согласно формуле (5.I.I4)

$$\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j \overline{U} T) = \sum_j \operatorname{sgn} f_j (\overline{U} f_j T) = \overline{U} (\sum_j \operatorname{sgn} f_j (f_j T),$$

и если T удовлетворяет условию (5.2.7), то и $\overline{U} T$ удовлетворяет тому же условию.

Таким образом, $\overset{\circ}{C}_{p,q}$ инвариантно, и действие операторов $\overline{U}$ в $\overset{\circ}{C}_{p,q}$ определяет некоторое представление $SU(3)$, соответствующее схеме Юнга (p,q). Одномерное представление (для $SU(3)$ оно совпадает с тривиальным, как и для всех $SU(n)$) можно формально включить в изложенную схему, считая, что оно соответствует тензорам нулевой валентности T (скалярам).

Можно доказать, что полученные представления при всех p, q неприводимы, и что все неприводимые представления группы $SU(3)$ эквивалентны представлениям только что описанного типа. Наконец, можно доказать, что различным схемам Юнга соответствуют не эквивалентные представления.

(До сих пор мы проводили все построения так, чтобы их можно было непосредственно перенести на случай представлений с произвольным n. Ниже, однако, мы используем специфические свойства случая $n = 3$).

Степени представлений

Теперь нам надо определить размерности пространств $C^{\circ}_{p,q}$. При этом надо учесть, что не все уравнения вида (5.2.6) независимы от условий симметрии, уже ранее наложенных на тензоры из $C_{p,q}$. Если, например, два из индексов входят в группу $\alpha_1 \ldots \alpha_s$ (см. (5.2.3)), то, обозначая через f' постановку, меняющую местами эти индексы, мы можем повторить рассуждение, с помощью которого было выведено равенство (5.2.7), и доказать, что соответствующее соотношение (5.2.6) выполняется автоматически для всех тензоров из $C_{p,q}$. Поэтому можно считать, что в уравнении (5.2.6) участвует не более одного из индексов α и не более двух скобок $[\gamma\delta]$; при этом, в силу симметрии T относительно индексов α, выбор индекса α не влияет на получаемые соотношения. Таким образом, достаточно изучить соотношения (5.2.6) для тензоров строения

$$T^{\alpha[\gamma_1\delta_1][\gamma_2\delta_2]} \qquad (5.2.8)$$

Надо рассмотреть следующие случаи (мы приводим результаты, предоставляя проверку в качестве упражнения читателю):

a) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\lambda\tau} T^{\alpha[\rho\lambda][\tau\delta]} = 0$$

Эти соотношения для всех тензоров строения (5.2.8) выполняются автоматически.

b) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\lambda\tau} T^{\rho[\lambda\tau][\gamma\delta]} = 0 \qquad (5.2.9)$$

Число таких независимых соотношений равно трем.

c) Соотношения вида

$$\epsilon_{\rho\lambda\tau} T^{\rho[\lambda\delta_1][\tau\delta_2]} = 0$$

Эти соотношения равносильны соотношениям (5.2.9).
Итак, возвращаясь к общему случаю (5.2.3), мы видим, что достаточно рассмотреть соотношения вида (5.2.9), составленные для всех скобок в (5.2.3). Но тензор (5.2.3) симметричен от-

носительно перестановки скобок, и потому достаточно рассмотреть соотношения, в которых α_p заменяется на β, γ_q, на τ и δ_q на τ. Число таких соотношений равно числу не связанных условиями симметрии комбинаций индексов $\alpha_1 \dots \alpha_{p-1}, \gamma_1 \delta_1 \dots \gamma_{q-1} \delta_{q-1}$, т.е. числу независимых координат тензора строения

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_{p-1} [\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_{q-1} \delta_{q-1}]}$$

Обозначая размерность пространства $C_{p,q}$ через $\tilde{N}(p,q)$, мы получаем формулу для размерности пространства $\overset{\circ}{C}_{p,q}$:

$$N(p,q) = \tilde{N}(p,q) - \tilde{N}(p-1,q-1) \tag{5.2.10}$$

Дело сводится к определению чисел $\tilde{N}(p,q)$.

<u>Переход к бисимметрическим тензорам</u>. Чтобы найти $\tilde{N}(p,q)$ мы заменим пространство $C_{p,q}$ тензоров типа (5.2.3) изоморфным ему пространством; напомним, что комплексные эвклидовы пространства R_1 и R_2 называются изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие $y = \varphi(x)$ (где x пробегает R_1, а $y - R_2$) такое, что

$$\varphi(x'+x'') = \varphi(x') + \varphi(x''), \quad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x),$$
$$\big(\varphi(x') \,|\, \varphi(x'')\big) = (x' \,|\, x'') \tag{5.2.11}$$

Возьмем в качестве R_1 $C_{p,q}$, в качестве R_2 пространство $\{ym(p,q)\}$ всех p раз контравариантных и q раз ковариантных тензоров, симметричных по всем верхним индексам и по всем нижним индексам:

$$T^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}}_{\{\beta_1 \dots \beta_q\}} \tag{5.2.12}$$

Такие тензоры называются <u>бисимметрическими</u>.

Изоморфизм φ строится следующим образом. Фиксируем базис e в пространстве $C(3)$; тем самым все рассматриваемые тензоры над $C(3)$ приобретают определенные координаты.

По координатам (5.2.3) тензора из $C_{p,q}$ строим числа

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \epsilon_{\beta_1 \gamma_1 \delta_1} \epsilon_{\beta_2 \gamma_2 \delta_2} \dots \epsilon_{\beta_q \gamma_q \delta_q} T^{\{\alpha_1 \dots \alpha_p\}[\gamma_1 \delta_1] \dots [\gamma_q \delta_q]} \tag{5.2.13}$$

Как мы знаем (п.   ), задание произвольной системы чисел $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ однозначно определяет тензор $T(p,q)$, имеющий эти числа своими координатами относительно базиса e. Этот тензор мы и поставим в соответствие исходному тензору из $\overset{\circ}{C}(p,q)$;

итак, изоморфизм φ описывается в координатах уравнениями (5.2.13). Из свойств симметрии тензора $T^{\{\alpha_1\ldots\alpha_p\}[\gamma_1\delta_1]\ldots[\gamma_q\delta_q]}$ непосредственно следует, что $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ симметричен по верхним и по нижним индексам. Легко проверить, что φ - взаимно однозначное соответствие между пространством $C_{p,q}$ и $sym(p,q)$; тензоры из $C(p,q)$ могут быть восстановлены по их образам:

$$T^{\{\alpha_1\ldots\alpha_p\}[\gamma_1\delta_1]\ldots[\gamma_q\delta_q]} =$$

$$= \varepsilon^{\beta_1\gamma_1\delta_1}\ldots\varepsilon^{\beta_q\gamma_q\delta_q}\,T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \tag{5.2.14}$$

Нетрудно также проверить, что соответствие φ линейно и сохраняет скалярные произведения (ср. определение в п.), т.е. обладает всеми свойствами (5.2.11).

Построенный нами изоморфизм φ зависит, конечно, от выбранного базиса; если бы мы воспользовались другим базисом , то получили бы другой изоморфизм φ' тех же пространств $C_{p,q}$, $sym(p,q)$. Однако, формула (2.5.2) показывает, что эти изоморфизмы отличаются друг от друга только градиентным преобразованием (ср. п.

$$\varphi'(T) = e^{i\mu}\varphi(T), \quad \mu \text{ действительно} \tag{5.2.15}$$

Как мы увидим в дальнейшем, такое отличие для физических приложений несущественно.

Каждый бисимметрический тензор T можно задать его числами заполнения (ср. п. I): если $p = p_1 + p_2 + p_3$, $q = q_1 + q_2 + q_3$, p_i и q_i неотрицательны, обозначим через $T^{p_1p_2p_3}_{q_1q_2q_3}$ общее значение всех координат T, верхние индексы которых содержат p_1 единиц, p_2 двоек и p_3 троек, а нижние - q_1 единиц q_2 двоек и q_3 троек. Тогда число независимых координат T равно числу представлений p в виде суммы трех неотрицательных слагаемых, умноженному на аналогичное число представлений q. Но если p_3 уже выбрано, $0 \le p_3 \le p$, то число представлений $p - p_3$ в виде суммы $p_1 + p_2$ равно $p - p_3 + 1$. Всего p разлагается на три слагаемых

$$(p+1) + p + \ldots + 1 = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

способами. Итак, число независимых компонент тензора из $sym(p,q)$ и, тем самым, размерность $sym(p,q)$ равны

$\frac{(p+1)(p+2)(q+1)(q+2)}{4}$ Поскольку размерности изоморфных пространств совпадают, размерность $C(p,q)$

$$\tilde{N}(p,q) = \frac{1}{4}(p+1)(q+1)(p+q+2) \tag{5.2.16}$$

В силу (5.2.10) степень неприводимого представления

$$\boxed{N(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2)} \tag{5.2.17}$$

Переход от тензоров вида (5.2.3) к бисимметрическим тензорам имеет еще то преимущество, что число индексов при этом уменьшается: вместо $2q$ верхних индексов $\gamma_1,\delta_1,\dots,\gamma_q,\delta_q$ получаем q нижних индексов. Следует иметь в виду, что тензорам из $\overset{\circ}{C}_{p,q}$ соответствуют бисимметрические тензоры специального вида. Именно, линейные соотношения вида (5.2.9) (как мы видели, единственно существенные из соотношений (5.2.6)) равносильны, вследствие (5.2.13), (5.2.14), соотношениям вида

$$T^{\alpha_1\dots\alpha\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\alpha\dots\beta_q} = 0$$

(подразумевается суммирование по α). Но для бисимметрического тензора положение индекса суммирования среди верхних и нижних индексов безразлично; значит, соотношения, соответствующие (5.2.9), можно записать в виде

$$T^{\alpha\alpha_2\dots\alpha_p}_{\alpha\beta_2\dots\beta_q} = 0 \tag{5.2.18}$$

Тензоры, удовлетворяющие таким соотношениям, назовем бесследными (ср. определение бесследных матриц в п.). Итак, изоморфизм $\overset{\circ}{\varphi}$ переводит пространство неприводимого представления $\overset{\circ}{C}_{p,q}$ в пространство $\mathrm{sym}^{\circ}(p,q)$ бесследных бисимметрических тензоров валентности (p,q). Мы можем считать это последнее пространством представления, заменив операторы представления $\overset{\frown}{U}x = y$ операторами $\overset{\frown}{U}\varphi(x) = \varphi(y)$, действующими в $\mathrm{sym}^{\circ}(p,q)$. Таким образом, все (с точностью до эквивалентности) неприводимые представления группы $SU(3)$ задаются типами $\mathrm{sym}^{\circ}(p,q)$ бесследных бисимметрических тензоров. Мы будем обозначать неприводимые представления $SU(3)$ символами соответствующих тензоров: представление T^{α}_{β}, $T^{\alpha\beta\gamma}$ и т.п. В следующей таблице указаны степени $N(p,q)$ неприводимых представлений, соответствующих p,q = 1,2,..., 6; эта таблица симметрична относительно перестановки p,q, как видно из формулы (5.2.17).

$N(p,q)$

$p \backslash q$	0	I	2	3	4	5	6
0	I	3	6	IO	I5	2I	28
I		8	I5	24	35	48	63
2			27	42	60	8I	I05
3				64	90	I20	I54
4					I25	I65	2I0
5						2I6	273
6							343

(5.2.I9)

3. Разложение произведения представлений $SU(3)$ на неприводимые слагаемые

Пусть $T(p,q)$ и $T(r,s)$ - неприводимые представления группы $SU(3)$. Тогда можно построить кронеккерово произведение этих представлений (см. п. (4.5))

$$T \doteq T(p,q) \otimes T(r,s) \qquad (5.3.I)$$

которое уже не является неприводимым (кроме тривиального случая, когда один из сомножителей - нулевой валентности). Чтобы убедиться в приводимости T, достаточно заметить, что соотношения

$$T^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_r}\, T^{\beta\gamma_2\dots\gamma_r}_{\delta_1\delta_2\dots\delta_s} = 0 \qquad (5.3.2)$$

определяют инвариантное подпространство пространства $C(p+r,q+s)$ (мы, впрочем, не будем этого доказывать).

Как мы знаем (п. 4.5), всякое представление $SU(3)$ можно разложить в ортогональную сумму неприводимых представлений; некоторые из них могут быть эквивалентны друг другу, но число слагаемых каждого типа зависит лишь от заданного представления. Конечно, порядок слагаемых здесь не играет роли, так как он может быть произвольно изменен новой нумерацией координат в пространстве представления (5.3.I). Но обычно слагаемые представления выписывают в порядке убывания степеней. Для интересующих нас приложений существенны разложения произведений неприводимых представлений (5.3.I) на неприводимые слагаемые.

Например, мы увидим, что произведение двух восьмирядных представлений

$$T^{\alpha}_{\beta} \otimes T^{\gamma}_{\delta} = T^{\alpha\gamma}_{\beta\delta} \oplus T_{\rho\beta\tau} \oplus T^{\beta}_{\tau} \oplus T'^{\beta}_{\tau} \oplus T \qquad (5.3.3)$$

это значит, что пространство представлении $T^{\alpha}_{\beta} \otimes T^{\gamma}_{\delta}$ может быть разложено в ортогональную сумму подпространств, размерности которых равны, соответственно, степеням представлений, выписанных в правой части (5.3.3); каждое из этих подпространств инвариантно относительно представляющих операторов представлении $T^{\alpha}_{\beta} \times T^{\gamma}_{\delta}$, и ограничение (ср. п. (5.I)) этих операторов на таком подпространстве определяет неприводимое представление $SU(3)$. Представления T^{β}_{τ} , T'^{β}_{τ} эквивалентны, так как имеют одинаковый тип симметрии (I,I). Представления $T^{\rho\beta\tau}$ и $T_{\rho\beta\tau}$ - одинаковой степени, но не эквивалентны, так как имеют разные типы симметрии, соответствующие схемам Юнга (3,0) и (0,3). Таблица (5.2.I9) показывает, что размерности инвариантных подпространств равны, соответственно, 27, I0, I0, 8, 8, I; сумма размерностей равна, естественно, размерности пространства представления,т.е. $8^2 = 64$. При надлежащем выборе базиса в 64-мерном пространстве $T^{\alpha}_{\beta} \otimes T^{\gamma}_{\delta}$ все представляющие операторы имеют ящичные матрицы, содержащие по диагонали один ящик из 27 рядов, два ящика из I0, два из 8 и один из I ряда (ср. п. (4.5).

Чтобы для произведения любых неприводимых представлений $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}, T^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\delta_1 \dots \delta_s}$ найти разложение, аналогичное (5.3.3), можно воспользоваться описываемым ниже алгорифмом.

Как и в других аналогичных случаях (ср. п.(5.I), (5.2)), мы не будем доказывать, что этот алгорифм действительно дает требуемое разложение.

Читатель должен ясно представить себе смысл разложений вида (5.3.3), повторив определения произведения тензоров, кронеккерова произведения операторов и представлений, ортогональной суммы операторов и представлений, эквивалентности представлений. После этого надо научиться пользоваться алгорифмом для разложения, происхождение которого мы не имеем возможности здесь объяснить.

Алгорифм разложения. Изобразим представление (5.3.I) символом $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ Каждому такому символу мы сопоставим его δ - схему, которая строится следующим образом. Условимся употреблять в этом построении стрелки равной длины, направленные под углом -45° и -135° к горизонтали.

Тогда символу $\binom{p\ \ r}{q\ \ s}$ соответствует δ схема:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \binom{p,\ r}{q,\ s} \arrow[dl] \arrow[dr] & & & \\
 & & \binom{p,\ r-1}{q-1,\ s} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{p-1,\ r}{q,\ s-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & \binom{p,\ r-2}{q-2,\ s} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{p-1,\ r-1}{q-1,\ s-1} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \binom{p-2,\ r}{q,\ s-2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\cdot & & \binom{p-1,\ r-2}{q-2,\ s-1} & & \ldots & & \ldots
\end{tikzcd} \tag{5.3.4}$$

Если в процессе построения схемы получается символ $\binom{p,0}{q,s}$ или $\binom{p,r}{0,s}$, то стрелка $\swarrow$ от такого символа не строится; аналогично не строится стрелка $\searrow$ от символов $\binom{0,r}{q,s}$, $\binom{p,r}{q,0}$. Таким образом, "тупиками" схемы (из которых не исходят стрелки) могут быть лишь символы вида:

$$\binom{0,\ 0}{q,\ s},\ \binom{p,\ r}{0,\ 0},\ \binom{p,\ 0}{q,\ 0},\ \binom{0,\ r}{0,\ s} \tag{5.3.5}$$

Далее, введем символы вида $\binom{u,\ v}{t}$, $\binom{t}{u,\ v}$ Для каждого символа $\binom{p,r}{q,s}$ построим его $\underline{\epsilon\ \text{- схему}}$ вида:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
\ldots \\
\binom{p+r+2}{q-2,\ s-2} \arrow[u] \\
\binom{p+r+1}{q-1,\ s-1} \arrow[u] \\
\binom{p,\ r}{q,\ s} \arrow[u] \arrow[d] \\
\binom{p-1,\ r-1}{q+s+1} \arrow[d] \\
\binom{p-2,\ r-2}{q+s+2} \\
\ldots
\end{tikzcd} \tag{5.3.6}$$

Тупиками схемы являются символы вида:

$$\binom{t}{0,\ s},\ \binom{t}{q,\ 0},\ \binom{0,\ r}{t}\ \binom{p,\ 0}{t} \tag{5.3.7}$$

Теперь можно описать алгорифм разложенин следующим образом.

Данному произведению неприводимых представлений

$$T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \otimes T^{\gamma_1 \dots \gamma_r}_{\delta_1 \dots \delta_s} \qquad (5.3.8)$$

ставится в соответствие оимвол $\begin{pmatrix} p, & r \\ q, & s \end{pmatrix}$. Для этого символа отроится его δ - схема. Затем для каждого символа, входящего в δ - схему (в том числе для исходного $\begin{pmatrix} p, & r \\ q, & s \end{pmatrix}$) отроится его ϵ - охема. Наконец, каждому символу $\begin{pmatrix} u, & v \\ w, & z \end{pmatrix}$, входящему в ϵ - схему, ставитоя в соответотвие неприводимое представление типа $(u+v, w+z)$; каждому символу $\begin{pmatrix} u, & v \\ & t & \end{pmatrix}$ (или $\begin{pmatrix} & t & \\ u, & v \end{pmatrix}$), входящему в какую-либо из построенных ϵ -схем, ставится в соответствие неприводимое представление типа $(u+v, t)$ (или $(t, u+v)$). Если при этом один и тот же тип представления получаетоя ν раз, то такое представление ν раз входит олагаемым в искомое разложение (Символу $\begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$ соответствует тип $(0,0)$, т.е. тривиальное представление T).

<u>Примеры</u>:

a) $T^{\alpha}_{\beta} \otimes T^{\gamma}_{\delta}$. В этом случае имеем δ - схему:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \arrow[dr] & & \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$

и единственную ϵ - схему (со стрелками):

$$\begin{pmatrix} & 3 & \\ 0, & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0, & & 0 \\ & 3 & \end{pmatrix}$$

Символам этих схем

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 3 & \\ 0, & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & & 0 \\ & 3 & \end{pmatrix}$$

соответствует, по порядку, неприводимые представлении (5.3.3):

$$T_{\rho\delta}^{\alpha\gamma},\ T_{\tau}^{\lambda},\ T_{\tau}^{'\lambda},\ T,\ T^{\rho\lambda\tau},\ T_{\rho\lambda\tau},$$

и мы приходим к разложению (5.3.3).

$b)\ T_{\rho}^{\alpha} \otimes T^{\rho\lambda\tau}$ В этом случае получаем схемы:

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{pmatrix}1,3\\1,0\end{pmatrix} \arrow[dl] \\
 & \begin{pmatrix}1,2\\0,0\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}1\ 3\\1\ 0\end{pmatrix} \arrow[d] & \begin{pmatrix}1,2\\0,0\end{pmatrix} \arrow[d] & \\
\begin{pmatrix}0,2\\2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0,1\\1\end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$

и разложение

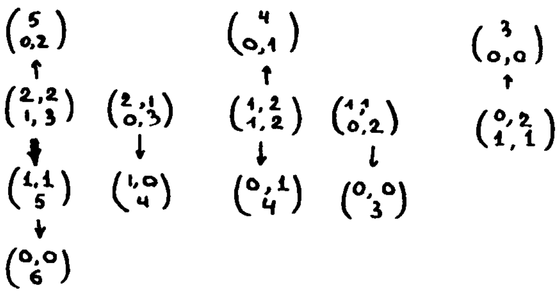
$$T_{\rho}^{\alpha} \otimes T^{\rho\lambda\tau} = T_{\rho}^{\alpha\rho\lambda\tau} \oplus T^{\rho\lambda\tau} \oplus T_{\rho\delta}^{\alpha\gamma} \oplus T_{\rho}^{\alpha}$$

Проверим, что сумма степеней представлений в правой части равна степени представления в левой части: по таблице (5.2.I9

$$8\cdot 10 = 35 + 10 + 27 + 8.$$

$c)\ T_{\rho}^{\alpha\beta} \otimes T_{\lambda\mu\nu}^{\rho\lambda}$ В этом случае получаем схемы:

$$\begin{tikzcd}
 & \begin{pmatrix}2,2\\1,3\end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\begin{pmatrix}2,1\\0,3\end{pmatrix} \arrow[dr] & & \begin{pmatrix}1,2\\1,2\end{pmatrix} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \begin{pmatrix}1,1\\0,2\end{pmatrix} \arrow[dr] & & \begin{pmatrix}0,2\\1,1\end{pmatrix} \arrow[dl] \\
 & & \begin{pmatrix}0,1\\0,1\end{pmatrix} &
\end{tikzcd}$$



и разложение (где эквивалентные представления отмечены штрихами)

$$T_{\rho}^{\alpha\delta} \otimes T^{\rho\sigma}_{\lambda\mu\nu} = T^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\rho\sigma\tau\lambda} \oplus T^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma\tau} \oplus T'^{\alpha\beta\gamma}_{\rho\sigma\tau} \oplus T^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \oplus$$

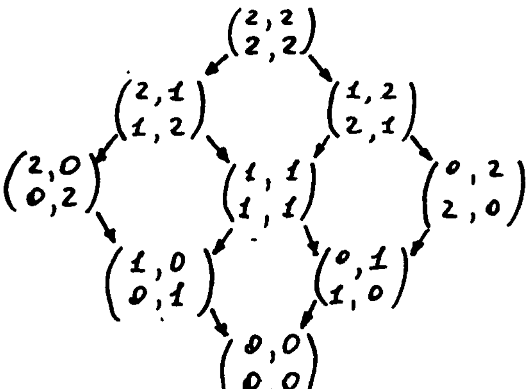
$$\oplus T'^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \oplus T^{\alpha}_{\rho} \oplus T^{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}_{\rho\sigma} \oplus T^{\alpha\beta}_{\rho\sigma\tau\lambda\mu} \oplus T_{\rho\sigma\tau\lambda\mu\nu} \oplus T^{\alpha}_{\rho\sigma\tau\lambda} \oplus$$

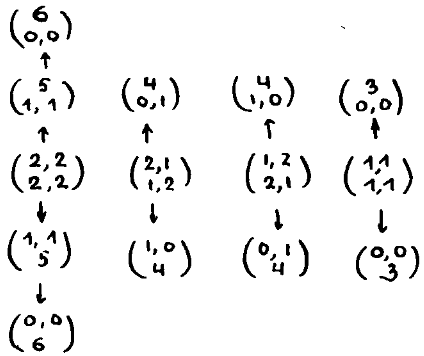
$$\oplus T^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\rho} \oplus T'^{\alpha}_{\rho\sigma\tau\lambda} \oplus T_{\rho\sigma\tau} \oplus T^{\alpha\beta\gamma}$$

Подсчет размерностей:

$15 \cdot 42 = 125 + 64 + 64 + 27 + 27 + 8 + 81 + 81 + 28 + 35 +$
$+ \qquad + 35 + 35 + 10 + 10.$

α) $T^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \times T^{\gamma\delta}_{\lambda\mu}$ Схемы





приводят к разложению (для краткости мы ставим <u>число</u> индексов вместо самих индексов):

$$T^{2}_{2}\otimes T^{2}_{2}=T^{4}_{4}\oplus T^{3}_{3}\oplus T'^{3}_{3}\oplus T^{2}_{2}\oplus T'^{2}_{2}\oplus T''^{2}_{2}\oplus$$
$$\oplus T^{1}_{1}\oplus T'^{1}_{1}\oplus T\oplus T^{6}\oplus T^{5}_{2}\oplus T^{2}_{5}\oplus T_{6}\oplus T^{4}_{1}\oplus T^{1}_{4}\oplus$$
$$\oplus T'^{4}_{1}\oplus T'^{1}_{4}\oplus T^{3}\oplus T_{3}$$

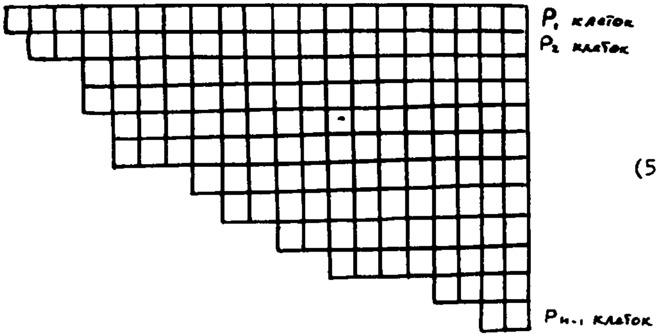
Подсчет размерностей:

$$27^2 = 125 + 2\cdot 64 + 3\cdot 27 + 2\cdot 8 + 1 + 2\cdot 28 + 2\cdot 81 + 4\cdot 35 + 2\cdot 10$$

4. <u>Представления $SU(n)$ при любом n</u>

Методы, развитые в п. 2, позволяют найти все неприводимые представления группы $SU(n)$ при любом n ; для этого их надо обобщить следующим образом.

Рассмотрим невозрастающие последовательности из $n-1$ неотрицательных целых чисел $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_{n-1}$ (длина последовательности на единицу меньше размерности пространства $C(n)$, где действует $SU(n)$!). Не исключается, что числа p_j , начиная с некоторого, равны нулю. Каждой такой последовательности поставим в соответствие <u>схему Юнга</u> Y :



(5.4.I)

Пслсжим $p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = \tilde{N}$

Для каждсй схемы Юнга псстроим всевозможные тензоры соответствующегс ей типа симметрии. Именно, рассмотрим тензоры

$$T^{\{\alpha_1\ldots\alpha_{r_1}\}[\beta_1^{(1)}\beta_2^{(1)}]\ldots[\beta_1^{(r_2)}\beta_2^{(r_2)}][\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}\gamma_3^{(1)}]\ldots[\gamma_1^{(r_3)}\gamma_2^{(r_3)}\gamma_3^{(r_3)}]\ldots[\delta_1^{(1)}\ldots\delta_{n-1}^{(1)}]\ldots[\delta_1^{(r_{n-1})}\ldots\delta_{n-1}^{(r_{n-1})}]}$$

$$r_j = p_j - p_{j+1}, \; j = 1,2,\ldots,n-2 \qquad r_{n-1} = p_{n-1} \qquad (5.4.2)$$

обладающие следующими свсйствами:

(I) T симметричен относительно индексов $\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}$;

(2) T косссимметричен относительнс каждсй группы индекссв, стсящей в однсй из квадратиых скобок;

(3) симметричен отнсситeльно перестановки квадратных скобок, ссдержащих сдинаксвое число индекссв (причем нсрндск индексов в скобках не иеняетсн).

Пространство всех тензсров типа (5.4.2), ссответствующих данной схеме Юнга Y , обсзначим через $C(Y)$.

Рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 2, доказывается, что пcдпрсстранство $C(Y)$ пространства всех теизоров той же валентиости $C(N,0)$ инвариaнтно стнсситeльно операторов U $\tilde{N}$ - рядногс представлеиия группы .

Далее, вводится система чисел

$$\varepsilon_{r_1\ldots r_n} = \varepsilon^{r_1\ldots r_n} \qquad (5.4.3)$$

равных I, если числа $r_1 \ldots r_n$ различны и образуют четную пcдстановку, - I, если эти числа различны и образуют нечетную подстановку, и нулю, если какие-либо два из этих чисел равны.

Выбиран произвольно n индексов тензора (5.4.2), составим уравнения

$$\epsilon_{i_1 \ldots i_n} T^{\cdot i_1 \ldots i_n} = 0 \qquad (5.4.4)$$

Всевозможные уравнения этого рода (в которых индексы суммирования $i_1, \ldots, i_n$ занимают любые n мест из N возможных) определяют подпространство $C^{\circ}(Y)$ пространства $C(Y)$ Так же, как в п. 2, доказывается инвариантность $C^{\circ}(Y)$ относительно представляющих операторов $\overline{U}$. Представление $SU(n)$ операторами, действующими в $C^{\circ}(Y)$, оказывается <u>неприводимым</u>. Степень этого представления, т.е. размерность пространства $C^{\circ}(Y)$, равна

$$N(r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1}(r_i + 1)\prod_{i=1}^{n-2}\frac{r_i + r_{i+1} + 2}{2} \cdots \prod_{i=1}^{2}\frac{r_i + \ldots + r_{i+n-3} + n-2}{n-2} \cdot \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{n-1} + n-1}{n-1}; \qquad (5.4.5)$$

Доказательство формулы (5.4.5) здесь не приводится.

Как в п. 2, неприводимые представления можно обозначить соответствующими типами тензоров (5.4.2): представление

$$T^{\alpha_1[\beta_1\beta_2]}, \quad T^{\{\alpha_1\alpha_2\}[\beta_1\beta_2][\gamma_1\gamma_2\gamma_3]} \quad \text{и т.д.}$$

Иногда удается упростить изучение представления, свертывая тензор T с $\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ по каким-либо n индексам и переходя к соответствующему пространству $C^{\circ}_{p,q}$ (ср. п. 2).

Можно доказать, что каждое неприводимое представление группы $SU(n)$ эквивалентно одному из только что описанных,а эти последние, соответствующие различным схемам Юнга, не эквивалентны друг другу.

В приложениях к физике очень важен случай $SU(6)$; но, в отличие от представлений $SU(2)$ и $SU(3)$, представления группы $SU(6)$ не допускают какой-либо специфически упрощенной процедуры исследования, и их изучение производится, в основном, теми же приемами, что и в общем случае.

Поэтому мы не будем здесь перечислять представлений $SU(6)$, а займемся ими в дальнейшем, по мере надобности.

Фет Абрам Ильич

Математическое введение в теорию элементарных частиц

Ответотвенный за выпуси Черепенова Т.А.

Псдписено в печать 25/II-1966г МН04082
Бумага 60x84 I/16 Объем 5,8 п.л.
Тираж 400 Цена 20 ксп., зеказ № 110

Ротапринт НГУ, Нсвосибирск -90.